BEDINGUNGEN FÜR DIE NORMALITÄT VON SUBNORMALTEILERN IN ENDLICHEN GRUPPEN

DISSERTATION
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften
der Mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von
Rudolf Maier
aus Süssen

1969

BEDINGUNGEN FÜR DIE NORMALITÄT VON SUBNORMALTEILERN IN ENDLICHEN GRUPPEN

DISSERTATION
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften
der Mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von
Rudolf Maier
aus Süssen

1969

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Tag der mündlichen Prüfung: 11. Juli 1969

Dekan: Prof. Dr. Adolf Seilacher

1. Berichterstatter: Prof. Dr. Olaf Tamaschke

2. Berichterstatter: Prof. Dr. Helmut Wielandt

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Bezeichnungen	1
Einleitung	4
§ 1 Definitionen, Hilfssätze und bekannte Aussagen	9
§ 2 Sätze über quasinormale Untergruppen. .	20
§ 3 Gruppen mit hamiltonschen Sylowgruppen. Gruppen mit modularen Sylowgruppen. . .	24
§ 4 Gruppen, deren sämtliche Quasinormalteiler normal sind.	29
§ 5 Gruppen, in deren sämtlichen Untergruppen Quasinormalität und Normalität zusammenfallen.	33
§ 6 Gruppen mit kritischen Sylowgruppen. . .	53
§ 7 Weitere Sätze über quasinormale Untergruppen.	56
Literaturverzeichnis	62
Lebenslauf	63

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547612_0122

Bezeichnungen

Grosse lateinische Buchstaben A,B,G,... bezeichnen stets endliche Gruppen. Alle Gruppen (mit Ausnahme einiger in Beispielen auftretenden additiven Gruppen von Vektorräumen) werden multiplikativ geschrieben. 1 bezeichnet das neutrale Element der Gruppe G oder auch die Untergruppe von G, die nur aus 1 besteht.

Kleine lateinische Buchstaben a,b,g,... (ausgenommen p und q) bedeuten Gruppenelemente. Die Buchstaben p und q bedeuten Primzahlen.

Kleine griechische Buchstaben $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$ (ausgenommen π und φ) bedeuten ganze Zahlen. Der Buchstabe π bedeutet eine Menge von Primzahlen. Der Buchstabe φ bedeutet einen Gruppenautomorphismus.

Grosse deutsche Buchstaben $\mathfrak{F},\mathfrak{G},\mathfrak{P},\ldots$ bedeuten Klassen von Gruppen. Dabei ist unter einer Klasse von Gruppen stets eine isomorphieabgeschlossene Klasse zu verstehen.

G sei eine Gruppe.

$|G|$: Die Ordnung von G

Aut G: Die Automorphismengruppe von G

$U \leq G$ ($U < G$): U ist (echte) Untergruppe von G

$U \trianglelefteq G$ ($U \lhd G$): U ist (echter) Normalteiler von G

$U \not\leq G$ ($U \not< G$): U ist nicht Untergruppe (Normalteiler) von G

$U \trianglelefteq\trianglelefteq G$: U ist subnormal in G

$U \underset{s}{\leq} G$: U ist seminormal in G

$U \underset{sts}{\leq} G$: U ist stark seminormal in G

$U \trianglelefteq_q G$: U ist quasinormal in G

$U \lessdot G$: U ist maximale Untergruppe von G

$U \lhd\!\cdot G$: U ist maximaler Normalteiler von G

$|G:U|$: Der Index von U in G

G/U: Die Faktorgruppe von G nach U (falls $U \trianglelefteq G$)

G' : Die Ableitung von G

G^* : Der kleinste Normalteiler von G mit nilpotenter Faktorgruppe

F(G): Die Fittinggruppe von G (der grösste nilpotente Normalteiler von G)

$1 = F_0 \trianglelefteq F_1 \trianglelefteq \ldots$: Die aufsteigende Fittingreihe von G, d. h. es gilt $F_\lambda / F_{\lambda-1} = F(G/F_{\lambda-1})$ für $\lambda = 1,2,\ldots$

Z(G): Das Zentrum von G

H(G): Das Hyperzentrum von G

$\Phi(G)$: Die Frattinigruppe von G (d. i. der Durchschnitt über alle maximalen Untergruppen von G)

U^g : Die mit $g \in G$ konjugierte Untergruppe zu U, also

$$U^g = g^{-1}Ug = \left\{ g^{-1}ug \;\middle|\; u \in U \right\}$$

$\mathfrak{N}_G(U)$: Der Normalisator von U in G

$\mathfrak{C}_G(U)$: Der Zentralisator von U in G

$\mathfrak{C}_G(H/K)$: Der Zentralisator des Hauptfaktors H/K in G, d. h. $\mathfrak{C}_G(H/K) = \left\{ g \in G \;\middle|\; ghK = hgK \text{ für alle } h \in H \right.$

$U \cap V$ $(U \vee V)$: Der Durchschnitt (das Erzeugnis) von U und V

UV : Das Komplexprodukt von U und V, d. h.

$$UV = \left\{ uv \;\middle|\; u \in U,\ v \in V \right\}$$

$\bigcap_i U_i$ $(\bigvee_i U_i)$: Der Durchschnitt (das Erzeugnis) einer gewissen Menge von Untergruppen

U_G (U^G): Der normale Kern (die normale Hülle) der

Untergruppe U in G, d. h. $U_G = \bigcap_{g \in G} U^g$ $(U^G = \bigvee_{g \in G} U^g)$

$U \times V$: Das direkte Produkt von U und V

$U \wr V$: Das semidirekte Produkt von U und V $(U \trianglelefteq G)$

$\langle x \rangle$: Die von dem Element x erzeugte Untergruppe von G

$j(X,Y)$: Die Länge einer Kompositionskette von X bis Y (wenn $Y \trianglelefteq \trianglelefteq X$)

$d_G(U)$: Der Defekt von U in G (wenn $U \trianglelefteq \trianglelefteq G$)

$GL(2,p)$: Die Menge der umkehrbaren 2-reihigen quadratischen Matrizen über einem Körper mit p Elementen

$\prod, \sum$: Zeichen für Produkt bezw. Summe

$\cong$: Zeichen für Isomorphie

$\alpha \mid \beta$ ($\alpha \nmid \beta$): α teilt (nicht) β

$\alpha \equiv \beta \bmod \nu$: α ist kongruent zu β modulo ν

$\mathbb{Z}$: Menge der ganzen Zahlen

$\mathbb{N}$: Menge der natürlichen Zahlen einschliesslich 0

Einleitung

Das Komplexprodukt AB zweier Untergruppen A und B einer Gruppe G ist genau dann eine Untergruppe von G, wenn die Untergruppen als Ganzes vertauschbar sind: AB = BA. Es ist darum wichtig, Kriterien dafür zu kennen, dass zwei Untergruppen vertauschbar sind. Normalteiler sind bekanntlich mit allen Untergruppen vertauschbar. Die Bedingung der Normalität einer Untergruppe ist jedoch für die Vertauschbarkeit von Untergruppen sehr stark. Man hat daher schon seit langem nach schwächeren Bedingungen als die Normalität für die Vertauschbarkeit von Untergruppen gesucht.

Eine Untergruppe Q von G heisst nach ORE [5, S. 7] quasinormal in G, wenn Q vertauschbar ist mit allen Untergruppen von G. In endlichen Gruppen sind alle quasinormalen Untergruppen stets subnormal.

WIELANDT hat in den Arbeiten [7] und [8] Bedingungen dafür angegeben, wann subnormale Untergruppen miteinander vertauschbar sind. Eine subnormale Untergruppe S von G heisst nach WIELANDT seminormal in G, wenn S mit allen subnormalen Untergruppen von G vertauschbar ist [1, S. 2]. Wir nennen S stark seminormal in G, wenn S seminormal ist in jeder Untergruppe von G, die S enthält. Jede quasinormale Untergruppe ist stark seminormal; jede stark seminormale Untergruppe ist seminormal.

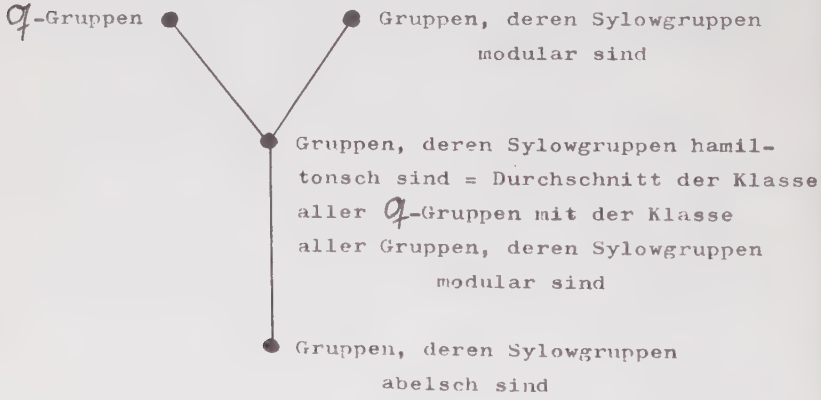
Die quasinormalen Untergruppen liegen auf Grund ihrer starken Vertauschbarkeitseigenschaften wesentlich näher

an der Normalität als "gewöhnliche" subnormale Untergruppen. Eine Aussage darüber, wie weit die Quasinormalteiler von der Normalität abweichen, haben ITÔ und SZÉP [4, S. 168-170] bewiesen: Ist Q quasinormal in G, so ist Q/Q_G stets nilpotent. Dabei bezeichnet Q_G den normalen Kern von Q in G.

Ist C eine charakteristische Untergruppe des Normalteilers N von G, so ist bekanntlich C ein Normalteiler von G. Ausgehend von dieser Tatsache fragen wir in § 2 nach charakteristischen Untergruppen von Quasinormalteilern von G, die normal in G sind. Ist π eine Primzahlmenge, so ist der kleinste Normalteiler von Q mit π-separierter bezw. π-auflösbarer Faktorgruppe normal in G für alle Quasinormalteiler Q von G. Ist S eine subnormale Untergruppe von G, so ist der kleinste Normalteiler S^* von S mit nilpotenter Faktorgruppe stets seminormal in G [8, S. 56, (1.5)]. Der kleinste Normalteiler Q^* des Quasinormalteilers Q mit nilpotenter Faktorgruppe ist i. a. nicht quasinormal in G. Wir zeigen: Q^* ist genau dann quasinormal in G, wenn Q^* normal ist in G. In § 7 geben wir ein Beispiel dafür an, dass Q^* nicht normal (quasinormal) in G zu sein braucht.

Wir nennen die Gruppe G eine q^*-n-Gruppe, wenn Q^* normal in G ist für alle Quasinormalteiler Q von G. Eine hinreichende Bedingung dafür, dass G eine q^*-n-Gruppe ist, geben wir ebenfalls in § 7.

Aus einschränkenden Forderungen an die innere Struktur der Sylowgruppen von G ergeben sich Normalitätsbedingungen für subnormale Untergruppen von G. In § 3 werden die Gruppen charakterisiert, deren Sylowgruppen hamiltonsch bezw. modular sind. Wir nennen die Gruppe G eine q-n-Gruppe, wenn alle Quasinormalteiler von G normal in G sind. Die q-n-Eigenschaft vererbt sich i. a. nicht auf Untergruppen von G. Diese Tatsache bereitet beweistechnisch häufig Schwierigkeiten. Hingegen ist die Klasse $\mathfrak{Q}$ aller Gruppen, deren sämtliche Untergruppen q-n-Gruppen sind, abgeschlossen bezüglich Untergruppenbildung. Die $\mathfrak{Q}$-Gruppen stehen mit den in § 3 charakterisierten Gruppen in der folgenden Beziehung:



Ein Hauptergebnis dieser Arbeit ist die Charakterisierung der $\mathfrak{Q}$-Gruppen, die wir in § 5 geben werden. Hierbei spielen die minimalen Gegenbeispiele zur Aussage "in allen Gruppen fällt Quasinormalität mit Normalität zusammen" eine

entscheidende Rolle. Wir nennen diese minimalen Gegenbeispiele "kritische Gruppen". Die kritischen Gruppen sind p-Gruppen. Sie lassen sich vollständig klassifizieren: Genau dann ist K eine kritische Gruppe, wenn K isomorph ist zum semidirekten Produkt $N \rtimes Q$ einer zyklischen Gruppe $N = \langle n \rangle$ der Ordnung $p^{\gamma-1}$ mit einer zyklischen Gruppe $Q = \langle s \rangle$ der Ordnung p, wobei $n^s = n^{p^{\gamma-2}+1}$, $\gamma \geq 3$ und $p^\gamma \neq 8$ gilt.

Mit diesen Begriffsbildungen lassen sich die $\mathfrak{Q}$-gruppen wie folgt kennzeichnen. Sei G eine Gruppe. Dann sind die folgenden Aussagen gleichwertig:

a) Die Quasinormalteiler jeder Untergruppe U von G sind normal in U.

b) Die Seminormalteiler jeder Untergruppe U von G werden von der Fittinggruppe von U normalisiert.

c) Die starken Seminormalteiler jeder Untergruppe U von G, die im Hyperzentrum von U liegen, sind normal in U.

d) Keine Sylowgruppe P von G besitzt einen Abschnitt U/M ($M \trianglelefteq U \leq P$), der isomorph ist zu einer kritischen Gruppe.

Im Zusammenhang mit den kritischen Gruppen beweisen wir in § 6: Sind die Sylowgruppen P von G zum kleinsten Primteiler p von |G| kritische Gruppen, so ist die Gruppe p-nilpotent. Dieser Satz wurde von Wong [3, S. 424, 3.5] nur für p = 2 bewiesen. Hieraus ergibt sich ein Auflösbarkeitskriterium: Besitzen alle Sylowgruppen von G einen zyklischen maximalen Normalteiler, so ist G auflösbar, wenn man zusätzlich einige Einschränkungen in der Wahl der 2-Sylowgruppen von G fordert. Dies ist eine Verallge-

meinerung eines Satzes von Hölder [3, S. 420, 2.9], welcher besagt, dass die Gruppe G immer dann auflösbar ist, wenn G nur zyklische Sylowgruppen besitzt.

Herrn Professor Dr. Olaf Tamaschke danke ich für die Anregungen zu dieser Arbeit. Seine Vorlesungen und die Vorlesungen von Herrn Professor Dr. Helmut Wielandt gaben mir wertvolle Anregungen.

§ 1 Definitionen, Hilfssätze und bekannte Aussagen.

Subnormalität, Seminormalität, starke Seminormalität und Quasinormalität.

G bezeichne im folgenden stets eine endliche Gruppe.

1.1 Def.: Seien $U,S,T,Q \leq G$.

a) U heisst eine subnormale Untergruppe von G, ein Subnormalteiler von G oder subnormal in G ($U \trianglelefteq\trianglelefteq G$), wenn eine Kette $G = G_0 \geqslant G_1 \geqslant \ldots \geqslant G_\varsigma = U$ von Untergruppen G_λ von G existiert mit $G_\lambda \trianglelefteq G_{\lambda-1}$ für $\lambda = 1,\ldots,\varsigma$. Die Untergruppenkette heisst dann eine Subnormalkette von G bis U und ς heisst ihre Länge. Das Minimum über die Längen aller möglichen Subnormalketten von G bis U heisst der Defekt $d_G(U)$ der subnormalen Untergruppe U in G.

b) S heisst eine seminormale Untergruppe von G, ein Seminormalteiler von G oder seminormal in G ($S \underset{s}{\leq} G$), wenn $S \trianglelefteq\trianglelefteq G$ ist und wenn gilt $SX = XS$ für alle $X \trianglelefteq\trianglelefteq G$ [1, S. 2].

c) T heisst eine stark seminormale Untergruppe von G, ein starker Seminormalteiler von G oder stark seminormal in G ($T \underset{sts}{\leq} G$), wenn $T \underset{s}{\leq} W$ gilt für alle Untergruppen W von G mit $T \leq W \leq G$.

d) Q heisst eine quasinormale Untergruppe von G, ein Quasinormalteiler von G oder quasinormal in G ($Q \underset{q}{\leq} G$), wenn $QX = XQ$ gilt für alle Untergruppen $X \leq G$ [5, S. 7].

Wir fassen einige bekannte bezw. leicht zu verifizierende Tatsachen über die eben erklärten Begriffe zusammen:

1.2 Lemma: Seien $U_1, U_2 \trianglelefteq\trianglelefteq G$, $S_1, S_2 \leqq_s G$, $T_1, T_2 \leqq_{sts} G$ und $Q_1, Q_2 \leqq_q G$. Ferner sei $V \leqq G$, $M \trianglelefteq\trianglelefteq G$, $T_1 \leqq V_1 \leqq G$, $N \trianglelefteq G$, $N \leqq Y \leqq G$ und es sei $\varphi \in$ Aut G. Dann gilt:

a) $V \cap U_1 \trianglelefteq\trianglelefteq V$, $M \cap S_1 \leqq_s M$, $T_1 \leqq_{sts} V_1$, $V \cap Q_1 \leqq_q V$.

b) $U_1 \cap U_2 \trianglelefteq\trianglelefteq G$.

c) $U_1 \vee U_2 \trianglelefteq\trianglelefteq G$ [7, S. 214, (7)], $S_1 \vee S_2 = S_1S_2 = S_2S_1 \leqq_s G$

$T_1 \vee T_2 = T_1T_2 = T_2T_1 \leqq_{sts} G$, $Q_1 \vee Q_2 = Q_1Q_2 = Q_2Q_1 \leqq_q G$.

d) $U_1^\varphi \trianglelefteq\trianglelefteq G$, $S_1^\varphi \leqq_s G$, $T_1^\varphi \leqq_{sts} G$, $Q_1^\varphi \leqq_q G$.

e) $Y \trianglelefteq\trianglelefteq G \iff Y/N \trianglelefteq\trianglelefteq G/N$, $Y \leqq_s G \iff Y/N \leqq_s G/N$

$Y \leqq_{sts} G \iff Y/N \leqq_{sts} G/N$, $Y \leqq_q G \iff Y/N \leqq_q G/N$.

f) In $|G:U_1 \cap U_2|$ gehen nur Primteiler auf, die schon in $|G:U_1|$ oder in $|G:U_2|$ aufgehen. Insbesondere gehen in $|G:U_{1G}| = |G:\bigcap_{g\in G} U_1^g|$ nur Primteiler auf, die schon in $|G:U_1|$ aufgehen. Deshalb sind z. B. alle subnormalen Hallgruppen von G Normalteiler von G [7, S. 214, (6)].

g) Die nilpotenten Gruppen sind gerade dadurch charakterisiert, dass in ihnen alle Untergruppen subnormal sind [7, S. 221, (16)].

1.3 Lemma: Sei G eine Gruppe. Dann gilt:

a) Jeder maximale Quasinormalteiler von G ist normal in G.

b) Jeder Quasinormalteiler von G ist subnormal in G.

Beweis: a) [5, S. 7, Prop. 1.3].

b) Sei $Q \trianglelefteq_q G$. Jede Untergruppenkette $G = G_0 > G_1 > \ldots$ $\ldots > G_\varsigma = Q$, in der jedes G_λ maximaler Quasinormalteiler von $G_{\lambda-1}$ ist, ist dann nach a) eine Subnormalkette.

q. e. d.

Nach 1.2 g) fallen in allen nilpotenten Gruppen die in 1.1 b) - d) erklärten Begriffe zusammen.

Allgemein gilt:

1.4 Lemma: Sei G eine Gruppe.

a) Aus $Q \trianglelefteq_q G$ folgt stets $Q \trianglelefteq_{sts} G$

b) Aus $T \trianglelefteq_{sts} G$ folgt stets $T \trianglelefteq_s G$

c) Aus $S \trianglelefteq_s G$ folgt stets $S \trianglelefteq\trianglelefteq G$.

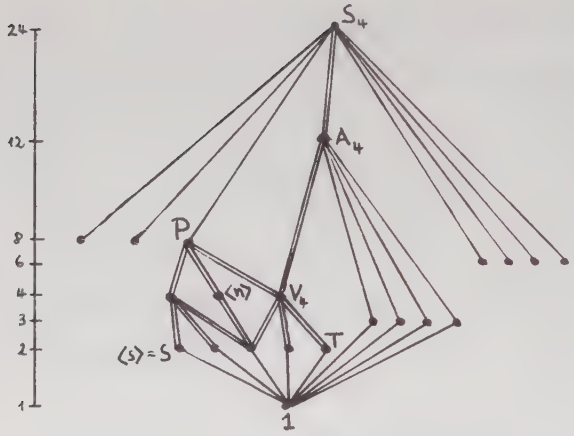
Beweis: a) ergibt sich sofort aus 1.3 b). Die Aussagen b) und c) sind trivial.

Die in 1.1 a) - d) erklärten Begriffe sind i. a. voneinander verschieden. Wir zeigen dies an drei Beispielen.

1.5 Beispiele:

(i) Sei $P = N \rtimes S$, $N = \langle n \rangle$, $S = \langle s \rangle$, $n^4 = s^2 = 1$, $n^s = n^{-1}$ eine Diedergruppe der Ordnung 8. Die Untergruppen $S = \langle s \rangle$ und $T = \langle ns \rangle$ sind zweielementige Subnormalteiler von P. Es gilt $s \in T \vee S$ und $n = (ns)s \in T \vee S$, also ist $T \vee S = P$. T ist also nicht vertauschbar mit S, da sonst $|T \vee S| = 4$ gelten müsste. Also ist T nicht seminormal in P.

(ii) Wir betrachten die symmetrische Gruppe S_4.



Sei $n = (1,2,3,4)$, $s = (2,4)$. $P = \langle n \rangle \vee \langle s \rangle$ ist eine 2-Sylowgruppe von S_4, also eine Diedergruppe der Ordnung 8. Sei $T = \langle ns \rangle = \langle (1,4)(2,3) \rangle$. Es gilt $T \trianglelefteq\trianglelefteq A_4$. Ist $U \trianglelefteq\trianglelefteq S_4$ und $U \neq S_4$, so gilt $U \trianglelefteq\trianglelefteq A_4$. Da alle subnormalen Untergruppen der A_4 miteinander vertauschbar sind, gilt $TU = UT$. Also ist $T \underset{s}{\trianglelefteq} S_4$. T ist aber nicht seminormal in P, da nach (i) die Gruppe T nicht vertauschbar ist mit $S = \langle s \rangle = \langle (2,4) \rangle$. Also ist T nicht stark seminormal in S_4.

(iii) Die zweielementigen Untergruppen der alternierenden Gruppe A_4 sind stark seminormale, nicht quasinormale Untergruppen von A_4.

Eine Aussage darüber, wie weit die Quasinormalteiler in beliebigen endlichen Gruppen von der Normalität abweichen können, gibt der folgende Satz von Itô und Szép.

1.6 Lemma: [4, S. 168] Sei $Q \underset{q}{\trianglelefteq} G$. Dann ist Q/Q_G nilpotent.

Man kennt folgende Methoden zur Konstruktion seminormaler Untergruppen in der Gruppe G:

1.7 Lemma: [8, S. 56, (1.5)], [2, S. 362, 2.4]

a) Ist $S \trianglelefteq\trianglelefteq G$ und ist S^* der kleinste Normalteiler von S mit nilpotenter Faktorgruppe, so gilt $S^* \leqq_s G$. Insbesondere sind alle perfekten Subnormalteiler von G stets seminormal in G. Dabei heisst eine Gruppe perfekt, wenn sie mit ihrer Kommutatorgruppe übereinstimmt.

b) Ist H/K ein Hauptfaktor von G und gilt $K \leqq R \trianglelefteq\trianglelefteq H$, so gilt $R \leqq_s G$.

1.8 Lemma: Seien $S,T \trianglelefteq\trianglelefteq G$. Dann gilt stets $(S \vee T)^* = S^*T^*$ [8, S. 56, (1.5)].

Die in 1.7 erhaltenen Seminormalteiler besitzen einen "grossen" Normalisator. Es gilt:

1.9 Lemma: Sei $S \trianglelefteq\trianglelefteq G$. Sei H/K ein Hauptfaktor von G. sei $K \leqq R \trianglelefteq\trianglelefteq H$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

a) $d_G(R) \leqq 2$

b) $F(G) \leqq \mathcal{N}_G(R)$

c) $F(G) \leqq \mathcal{N}_G(S^*)$.

Beweis: a) Es gilt $R \trianglelefteq H$, denn der minimale Normalteiler H/K von G/K normalisiert die subnormale Untergruppe $R/K \trianglelefteq\trianglelefteq G/K$ [9, S. 463]. Also gilt $R \trianglelefteq H \trianglelefteq G$ und damit $d_G(R) \leqq 2$.

b) Nach [3, S. 278, 4.3] gilt $F(G) \leqq \mathcal{C}_G(H/K)$, also ist $F(G) \leqq \mathcal{C}_G(R/K)$. Ist nun $g \in F(G)$, so ist g mit R modulo

K elementweise vertauschbar. Dann ist aber g mit R wenigstens als Ganzes vertauschbar, also $g \in \mathcal{N}_G(R)$. Damit gilt $F(G) \leqq \mathcal{N}_G(R)$.

c) Induktion nach $|G|$: Für $|G| = 1$ ist nichts zu zeigen. Sei $|G| > 1$. Ist $F(G)S < G$, so gilt $F(G)S \leqq M \lhd G$ für einen maximalen Normalteiler M von G. Nach Induktionsvoraussetzung gilt dann $F(M) = F(G) \cap M = F(G) \leqq \mathcal{N}_G(S^*)$. Sei also $F(G)S = G$. Mit 1.8 gilt dann $G^* = (F(G)S)^* = F(G)^* S^* = S^*$. Also ist $S^* \trianglelefteq G$ und es folgt $F(G) \leqq \mathcal{N}_G(S^*)$.

q. e. d.

Bemerkung: Im allgemeinen wird nicht jede seminormale Untergruppe der Gruppe G von der Fittinggruppe normalisiert. Wir werden in § 5 eine Klasse von Gruppen kennenlernen, in denen jeder Seminormalteiler von der Fittinggruppe normalisiert wird.

Beispiel 1.5 (ii) lehrt zugleich: Die in 1.7 b) beschriebenen Seminormalteiler sind i. a. nicht stark seminormale Untergruppen, denn die Gruppe $T = \langle (1,4)(2,3) \rangle$ von 1.5 (ii) liegt in dem Hauptfaktor $V_4/1$.

Jedoch gilt:

1.10 Lemma:

a) Jeder perfekte Subnormalteiler der Gruppe G ist stark seminormal in G.

b) Ist H/K ein nichtabelscher Hauptfaktor von G und gilt $K \leqq R \trianglelefteq \leqq H$, so ist $R \underset{sts}{\leqq} G$.

Beweis: a) Ist $S \trianglelefteq\trianglelefteq G$, ist S perfekt und gilt $S \leq W \leq G$, so ist S ein perfekter Subnormalteiler von W und damit gilt $S \leqq_{s} W$.

b) Ist H/K ein nichtabelscher Hauptfaktor von G, so ist H/K das direkte Produkt von isomorphen nichtabelschen einfachen Gruppen [3, S. 51, 9.12]. Ist nun $K \leq R \trianglelefteq\trianglelefteq H$, so ist R/K ein perfekter Subnormalteiler von G/K. Dann gilt $R/K \leqq_{sts} G/K$ nach a) und es folgt $R \leqq_{sts} G$.

q. e. d.

π-Gruppen, π-separierte und π-auflösbare Gruppen. Fittingklassen, Formationen und Polyklassen.

Im folgenden bezeichne π stets eine Menge von Primzahlen. π' sei die Menge aller Primzahlen p mit $p \notin \pi$.

1.11 Def.: Sei G eine Gruppe. G heisst eine π-Gruppe, wenn $|G|$ nur Primteiler aus π enthält.

1.12 Def.: Sei G eine Gruppe.

a) G heisst eine π-separierte Gruppe, wenn jeder Hauptfaktor von G entweder eine π-Gruppe oder eine π'-Gruppe ist.

b) G heisst eine π-auflösbare Gruppe, wenn G π-separiert ist und wenn jeder π-Hauptfaktor von G auflösbar ist [3, S. 659].

1.13 Def.: Seien $\mathfrak{F}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{P}$ Klassen von Gruppen.

a) $\mathfrak{F}$ heisst eine Fittingklasse, wenn gilt:

(i) Ist $G \in \mathfrak{F}$ und $N \trianglelefteq G$, so ist auch $N \in \mathfrak{F}$

(ii) Sind $N_1, N_2 \trianglelefteq G$ und $N_1, N_2 \in \mathfrak{F}$, so ist auch $N_1 N_2 \in \mathfrak{F}$ [3, S. 704].

b) $\mathfrak{Q}$ heisst eine Formation, wenn gilt:

(i) Ist $G \in \mathfrak{Q}$ und $N \trianglelefteq G$, so ist auch $G/N \in \mathfrak{Q}$

(ii) Sind $N_1, N_2 \trianglelefteq G$ mit $G/N_1 \in \mathfrak{Q}$ und $G/N_2 \in \mathfrak{Q}$, so ist auch $G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{Q}$ [3, S. 696].

c) $\mathfrak{P}$ heisst eine Polyklasse, wenn gilt:

(i) Ist $G \in \mathfrak{P}$ und $N \trianglelefteq G$, so gilt auch $N \in \mathfrak{P}$ und $G/N \in \mathfrak{P}$

(ii) Ist $N \trianglelefteq G$ und gilt $N \in \mathfrak{P}$ und $G/N \in \mathfrak{P}$, so gilt auch $G \in \mathfrak{P}$.

1.14 Lemma: Jede Polyklasse ist sowohl eine Fittingklasse als auch eine Formation. Das Umgekehrte gilt i. a. nicht.

Beweis: Sei $\mathfrak{P}$ eine Polyklasse. Dann ist $\mathfrak{P}$ abgeschlossen bezüglich Normalteiler- und Faktorgruppenbildung.
Seien $N_1, N_2 \trianglelefteq G$ und gelte $N_1, N_2 \in \mathfrak{P}$. Es gilt dann $N_1 N_2/N_1 \cong N_2/N_1 \cap N_2$. Es gilt also $N_1 \in \mathfrak{P}$ und $N_1 N_2/N_1 \in \mathfrak{P}$ also auch $N_1 N_2 \in \mathfrak{P}$. $\mathfrak{P}$ ist also eine Fittingklasse.

Seien $N_1, N_2 \trianglelefteq G$ und gelte $G/N_1 \in \mathfrak{P}$ und $G/N_2 \in \mathfrak{P}$.
Wegen $G/N_1 \in \mathfrak{P}$ folgt $N_1 N_2/N_1 \in \mathfrak{P}$, also ist $N_2/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{P}$.
Wegen $G/N_1 \cap N_2 \,/\, N_2/N_1 \cap N_2 \cong G/N_2 \in \mathfrak{P}$ folgt schliesslich $G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{P}$. $\mathfrak{P}$ ist also auch eine Formation.

Die nilpotenten Gruppen bilden sowohl eine Formation als auch eine Fittingklasse, jedoch keine Polyklasse.

q. e. d.

Die auflösbaren Gruppen bilden eine Polyklasse, die alle p-Gruppen enthält. Ist π eine Primzahlmenge, so bilden die π-Gruppen eine Polyklasse, die jedoch nicht alle p-Gruppen enthält, wenn $\pi' \neq \emptyset$ ist.

Für das folgende Lemma siehe man auch [10, S. 246, Th. 28]:

1.15 Lemma: Sei $\mathfrak{F}$ eine Fittingklasse. Sei G eine Gruppe. Seien $A,B \trianglelefteq\trianglelefteq G$ und seien $A,B \in \mathfrak{F}$. Dann gilt $A \vee B \in \mathfrak{F}$. Insbesondere ist die normale Hülle jedes $\mathfrak{F}$-Subnormalteilers von G ein $\mathfrak{F}$-Normalteiler von G.

Beweis: Sei $\mathfrak{F}$ eine Fittingklasse. Sei G eine Gruppe. Ist $G^{\mathfrak{F}}$ der grösste $\mathfrak{F}$-Normalteiler von G, so ist $G^{\mathfrak{F}}$ eine charakteristische Untergruppe von G. Ist nun $M \trianglelefteq G$, so gilt also $M^{\mathfrak{F}} \trianglelefteq G$. Infolgedessen ist $M^{\mathfrak{F}} \leq G^{\mathfrak{F}}$. Damit folgt aus $M \trianglelefteq\trianglelefteq G$ auch stets $M^{\mathfrak{F}} \leq G^{\mathfrak{F}}$. Wegen $A,B \in \mathfrak{F}$ gilt $A^{\mathfrak{F}} = A$ und $B^{\mathfrak{F}} = B$. Also gilt $A,B \leq G^{\mathfrak{F}}$. Somit ist $A \vee B \trianglelefteq\trianglelefteq G^{\mathfrak{F}}$. Wegen $G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$ ist schliesslich $A \vee B \in \mathfrak{F}$, da $\mathfrak{F}$ bezüglich Normalteilerbildung abgeschlossen ist.

q. e. d.

1.16 Lemma: Sei π eine Primzahlmenge. Dann bildet die Klasse $\mathfrak{P}_\pi$ aller π-separierten und die Klasse $\tilde{\mathfrak{P}}_\pi$ aller π-auflösbaren Gruppen eine Polyklasse, die alle auflösbaren Gruppen und damit auch alle p-Gruppen enthält.

Beweis: $\mathfrak{P}_\pi$ bezw. $\tilde{\mathfrak{P}}_\pi$ ist abgeschlossen bezüglich Untergruppen- und Faktorgruppenbildung [3, S. 659]. G besitze einen π-separierten (π-auflösbaren) Normalteiler N mit π-separierter (π-auflösbarer) Faktorgruppe. Sei $G = G_0 \rhd G_1 \rhd \dots \rhd G_\varrho = N = N_0 \rhd N_1 \rhd \dots \rhd N_\sigma = 1$ eine Hauptreihe von G durch N. Nach Voraussetzung ist dann jede Faktorgruppe $G_{\lambda-1}/G_\lambda$ ($\lambda = 1,\dots,\varrho$) entweder eine π-Gruppe oder eine π'-Gruppe. Die π-Gruppen unter ihnen sind auflösbar, wenn es sich um die Klasse $\tilde{\mathfrak{P}}_\pi$ handelt. Wir betrachten die Gruppen $N_{\lambda-1}/N_\lambda$ für $\lambda = 1,\dots,\sigma$. Wir können $\lambda = \sigma$ annehmen. Dann ist $M := N_{\sigma-1}$ ein minimaler Normalteiler von G. Sei R ein minimaler Normalteiler von N mit $1 < R \leq M$. Da N eine π-separierte (π-auflösbare) Gruppe ist, ist R entweder eine π-Gruppe oder eine π'-Gruppe. Handelt es sich um die Klasse $\tilde{\mathfrak{P}}_\pi$, so ist R auflösbar, wenn R eine π-Gruppe ist. Es ist $R \trianglelefteq \trianglelefteq G$. Da M ein minimaler Normalteiler von G ist, gilt $R^G = M$. Mit 1.14 und 1.15 ist dann auch M entweder eine π-Gruppe oder eine π'-Gruppe. Ist R auflösbar, so ist auch M auflösbar.

q. e. d.

1.17 Lemma: Sei G eine Gruppe. Sei $S \trianglelefteq\trianglelefteq G$. S sei auflösbar von der nilpotenten Länge ϱ. Ist dann $1 = F_0 < F_1 < \ldots < F_\varrho \leq \ldots$ die aufsteigende Fittingreihe von G, so gilt $S \leq F_\varrho$.

Beweis: Für $\varrho = 0$ ist die Aussage klar. Sei $\varrho > 0$. Sei S^* der kleinste Normalteiler von S mit nilpotenter Faktorgruppe. Dann hat S^* die nilpotente Länge $\varrho - 1$ und wir können annehmen $S^* \leq F_{\varrho-1}$. Betrachte $G/F_{\varrho-1}$. Es gilt $SF_{\varrho-1}/F_{\varrho-1} \trianglelefteq\trianglelefteq G/F_{\varrho-1}$. Es gilt $SF_{\varrho-1}/F_{\varrho-1} \cong S/S \cap F_{\varrho-1}$. Wegen $S^* \leq F_{\varrho-1} \cap S$ ist also $SF_{\varrho-1}/F_{\varrho-1}$ nilpotent. Nach 1.15 gilt also $SF_{\varrho-1}/F_{\varrho-1} \leq F(G/F_{\varrho-1})$, also $S \leq SF_{\varrho-1} \leq F_\varrho$.

q. e. d.

§ 2 Sätze über quasinormale Untergruppen.

Nach 1.6 weichen die Quasinormalteiler in beliebigen endlichen Gruppen höchstens um "ein nilpotentes Stück" von der Normalität ab. Wir wollen einen Satz in ähnlicher Richtung beweisen, welcher, grob gesprochen, besagt, dass die (nicht auflösbaren) Quasinormalteiler von G im allgemeinen "viele" Normalteiler von G enthalten. Aus 1.6 ergibt sich zunächst ein einfaches Ergebnis:

2.1 Satz: Ist $Q \trianglelefteq_q G$ und ist Q perfekt, so gilt $Q \trianglelefteq G$. Jede charakteristische Untergruppe von Q ist daher normal in G.

2.2 Lemma: Sei $\mathfrak{K}$ eine bezüglich Untergruppen- und Faktorgruppenbildung abgeschlossene Klasse von Gruppen. Sei $\mathfrak{H}$ eine Formation, die alle p-Gruppen enthält. $\mathfrak{H}$ sei abgeschlossen bezüglich Normalteilerbildung. Sei G ein minimales Gegenbeispiel zu der Aussage: "Für jede $\mathfrak{K}$-Gruppe H und für jeden Quasinormalteiler Q von H ist der kleinste Normalteiler $Q_{\mathfrak{H}}$ von Q mit $\mathfrak{H}$-Faktorgruppe ein Normalteiler von H".
Ist dann $Q \trianglelefteq_q G$ und $Q_{\mathfrak{H}} \not\trianglelefteq G$, so ist G/Q_G eine p-Gruppe, es gilt $(Q_{\mathfrak{H}})_G = 1$ und Q_G ist eine $\mathfrak{H}$-Gruppe.

Beweis: Sei $Q \trianglelefteq_q G$ und $Q_{\mathfrak{H}} \not\trianglelefteq G$. Liegt Q in zwei verschiedenen maximalen Untergruppen U und V von G, so folgt $Q_{\mathfrak{H}} \leq U$ und $Q_{\mathfrak{H}} \leq V$, also $Q_{\mathfrak{H}} \trianglelefteq U \vee V = G$ im Widerspruch zur Annahme. Sei also $Q \trianglelefteq U < G$ für genau eine maximale Untergruppe U von G. Sei S eine Sylowgruppe von G. Q ist mit S vertauschbar, also ist QS eine Gruppe. Ist dann $QS < G$, so folgt

$S \leq QS \leq U$. Dies kann jedoch nicht für alle Sylowgruppen von G gelten, denn sonst wäre $|U| = |G|$. Sei also P eine p-Sylowgruppe von G mit $QP = G$. Dann ist $|G:Q| = |QP:Q| = |P:P \cap Q|$ eine p-Potenz. Wegen $Q \trianglelefteq \trianglelefteq G$ ist dann G/Q_G eine p-Gruppe nach 1.2·f). Da $\mathfrak{H}$ alle p-Gruppen enthält, folgt $Q_{\mathfrak{H}} \leq Q_G$. Setze $N := (Q_{\mathfrak{H}})_G$. Ist $N > 1$, dann gilt $|G/N| < |G|$. Aus $Q/N \leqq_q G/N$ folgt dann $(Q/N)_{\mathfrak{H}} = Q_{\mathfrak{H}}N/N = Q_{\mathfrak{H}}/N \leq G/N$, also $Q_{\mathfrak{H}} \trianglelefteq G$ im Widerspruch zur Annahme. Also ist $N = 1$. $Q/Q_{\mathfrak{H}}$ ist eine $\mathfrak{H}$-Gruppe. Da $\mathfrak{H}$ nach Voraussetzung bezüglich Normalteilerbildung abgeschlossen ist, ist auch $Q_G/Q_{\mathfrak{H}}$ eine $\mathfrak{H}$-Gruppe. Jede der Gruppen $Q_G/Q_{\mathfrak{H}}^g$ $(g \in G)$ ist eine $\mathfrak{H}$-Gruppe. Dann ist aber auch $Q_G/(Q_{\mathfrak{H}})_G = Q_G/1 \cong Q_G$ eine $\mathfrak{H}$-Gruppe, da $\mathfrak{H}$ eine Formation ist.

q. e. d.

2.3 Satz: Sei $\mathfrak{P}$ eine Polyklasse, die alle p-Gruppen enthält. Sei G eine Gruppe und sei $Q \leqq_q G$. Dann ist der kleinste Normalteiler $Q_{\mathfrak{P}}$ von Q mit $\mathfrak{P}$-Faktorgruppe ein Normalteiler von G.

Beweis: Sei G ein minimales Gegenbeispiel. Setzt man in 2.2 $\mathfrak{H} = \mathfrak{P}$ und wählt man für $\mathfrak{K}$ die Klasse aller endlichen Gruppen, so gilt: Ist $Q \leqq_q G$ und $Q_{\mathfrak{P}} \not\trianglelefteq G$, so ist G/Q_G eine p-Gruppe und Q_G ist eine $\mathfrak{P}$-Gruppe. Nach Voraussetzung gilt $G/Q_G \in \mathfrak{P}$. Da $\mathfrak{P}$ eine Polyklasse ist, folgt $G \in \mathfrak{P}$. Damit gilt auch $Q \in \mathfrak{P}$, also $Q_{\mathfrak{P}} = 1$. G ist somit kein Gegenbeispiel.

q. e. d.

Aus 2.3 und 1.16 folgt nun unmittelbar:

2.4 Satz: Sei G eine Gruppe. Sei π eine Primzahlmenge. Sei $Q \trianglelefteq_q G$. Dann gilt:

a) Der kleinste Normalteiler $Q_{\mathcal{R}_\pi}$ von Q mit π-separierter Faktorgruppe ist normal in G.

b) Der kleinste Normalteiler $Q_{\tilde{\mathcal{R}}_\pi}$ von Q mit π-auflösbarer Faktorgruppe ist normal in G.

Jeder (nicht auflösbare) Quasinormalteiler der Gruppe G enthält also "eine ganze Reihe" Normalteiler von G, nämlich alle die Gruppen $Q_{\mathcal{R}_\pi}$ und $Q_{\tilde{\mathcal{R}}_\pi}$, wobei π sämtliche Primzahlmengen durchlaufen darf.

Die Voraussetzung von 2.3, dass $\mathcal{R}$ eine Polyklasse ist, ist sehr wesentlich. Wir werden in § 7 ein Beispiel angeben, welches besagt, dass der kleinste Normalteiler Q^* mit nilpotenter Faktorgruppe eines Quasinormalteilers Q der Gruppe G nicht normal in G zu sein braucht. Jedoch gilt:

2.5 Satz: Sei G eine Gruppe. Sei $Q \trianglelefteq_q G$. Dann sind die folgenden Aussagen gleichwertig:

a) $Q^* \trianglelefteq_q G$

b) $Q^* \trianglelefteq G$.

Beweis: b) $\Longrightarrow$ a) ist trivial.

a) $\Longrightarrow$ b): Sei G ein minimales Gegenbeispiel. Sei $Q \trianglelefteq_q G$, $Q^* \trianglelefteq_q G$, aber $Q^* \not\trianglelefteq G$. Wie im Beweis von Lemma 2.2 zeigt man: G/Q_G ist eine p-Gruppe. Q_G ist eine nilpotente Gruppe. Sei nun T der kleinste Normalteiler von G mit p-Faktorgruppe. Dann gilt $Q^* \leq T \leq Q_G$. Da T nilpotent ist, gilt $p \nmid |T|$, sonst wäre das p-Sylowkomplement K_p von T

ein Normalteiler von G mit p-Faktorgruppe, wobei $K_p < T$ gelten würde. Dies widerspricht jedoch der Wahl von T. Also ist T das normale p-Sylowkomplement von G. Sei P eine p-Sylowgruppe von G. Da $Q^* \trianglelefteq_q G$ ist, ist Q^* mit P vertauschbar. Es gilt $Q^* P \cap T = Q^*$, da die Zahlen $|T:Q^*|$ und $|Q^*P:Q^*| = |P|$ teilerfremd sind. Wegen $T \trianglelefteq G$ gilt somit $Q^* \trianglelefteq PQ^*$. Wegen $Q^* \trianglelefteq T$ folgt $Q^* \trianglelefteq T(PQ^*) = G$. G ist somit kein Gegenbeispiel.

q. e. d.

§ 3 Gruppen mit hamiltonschen Sylowgruppen. Gruppen mit modularen Sylowgruppen.

3.1 Def.: Sei G eine Gruppe. G heisst eine hamiltonsche Gruppe, wenn aus $U \leq G$ stets $U \trianglelefteq G$ folgt.

Trivial ist: Die Gruppe G ist genau dann eine hamiltonsche Gruppe, wenn G nilpotent ist und wenn alle Sylowgruppen von G hamiltonsche Gruppen sind.

Die hamiltonschen p-Gruppen sind bestimmt durch den folgenden Satz:

3.2 Satz: Sei P eine p-Gruppe. Dann sind die folgenden Aussagen gleichwertig: [3, S. 308]

a) P ist eine hamiltonsche Gruppe

b) P ist abelsch, wenn $p > 2$ ist; P ist abelsch oder das direkte Produkt einer Quaternionengruppe der Ordnung 8 mit einer abelschen Gruppe vom Exponenten 1 oder 2, wenn $p = 2$ ist.

Wir charakterisieren nun allgemein die (nicht notwendig nilpotenten) Gruppen, deren Sylowgruppen hamiltonsche Gruppen sind.

3.3 Satz: Sei G eine Gruppe. Dann sind die folgenden Aussagen gleichwertig:

a) Aus $S \trianglelefteq \trianglelefteq U \leq G$ folgt stets $F(U) \leq \mathfrak{N}_U(S)$

b) Alle Sylowgruppen von G sind hamiltonsche Gruppen.

Beweis: a) $\Longrightarrow$ b): Sei P eine Sylowgruppe von G. Aus $S \leq P$ folgt $S \trianglelefteq \trianglelefteq P$ und nach Voraussetzung a) gilt dann $P = F(P) \leq \mathfrak{N}_P(S)$. Also ist $S \trianglelefteq P$ und somit ist P eine hamiltonsche Gruppe.

b) $\Longrightarrow$ a): Die Voraussetzung b) vererbt sich auf Untergruppen und Faktorgruppen von G. Sei $S \trianglelefteq \trianglelefteq G$. Es gilt $F(G) \leq \mathfrak{N}_G(S^*)$ nach 1.9 c). Somit gilt $S^* \trianglelefteq F(G)S$. Es ist $S/S^* \trianglelefteq \trianglelefteq F(G)S/S^*$ und $F(G)S^*/S^* \trianglelefteq F(G)S/S^*$. S/S^* ist nilpotent und $F(G)S^*/S^* \cong F(G)/F(G) \cap S^*$ ist nilpotent. Mit 1.15 folgt dann die Nilpotenz von $F(G)S/S^* = (S/S^*)(F(G)S^*/S^*)$. Da G nur hamiltonsche Sylowgruppen besitzt, ist $F(G)S/S^*$ eine hamiltonsche Gruppe. Es folgt $S \trianglelefteq F(G)S$, also $F(G) \leq \mathfrak{N}_G(S)$.

q. e. d.

Hieraus ergibt sich:

3.4 Satz: Sei G eine auflösbare Gruppe, deren Sylowgruppen hamiltonsche Gruppen sind. Dann ist die nilpotente Länge von G [3, S. 279, 4.7] und damit auch die Stufe von G [3, S. 39, 8.7] eine obere Schranke für den Defekt aller subnormalen Untergruppen von G.

Beweis: G habe die nilpotente Länge ϱ. Ist dann $1 = F_0 < F_1 < \ldots < F_{\varrho-1} < F_\varrho = G$ die aufsteigende Fittingreihe von G und ist $S \trianglelefteq \trianglelefteq G$, so erhält man nach 3.3 mit $G = SF_\varrho \geqslant SF_{\varrho-1} \geqslant \ldots \geqslant SF_0 = S$ eine Subnormalkette von G bis S von der Länge ϱ. Es ist also $d_G(S) \leq \varrho$.

q. e. d.

Allgemein gilt:

3.5 Satz: Sei G eine Gruppe, deren Sylowgruppen hamiltonsche Gruppen sind. Sei $S \trianglelefteq \trianglelefteq G$. S/S_G sei auflösbar von der nilpotenten Länge ϱ. Dann gilt $d_G(S) \leq \varrho + 1$.

Beweis: Wir können $S_G = 1$ annehmen, denn in G/S_G sind die Voraussetzungen des Satzes wiederum erfüllt. Nun ist also S auflösbar von der nilpotenten Länge ς. Nach 1.17 gilt $S \leq F_\varsigma$, wenn F_ς das ς-te Glied der aufsteigenden Fittingreihe von G bedeutet. F_ς ist auflösbar von der nilpotenten Länge ς. Nach 3.4 gilt also $d_{F_\varsigma}(S) \leq \varsigma$. Wegen $F_\varsigma \trianglelefteq G$ folgt dann $d_G(S) \leq \varsigma + 1$.

q. e. d.

Wir bemerken, dass die Stufe der auflösbaren Gruppe G i. a. keine Abschätzung für den Defekt der subnormalen Untergruppen von G ist, wenn man die Voraussetzung, dass G hamiltonsche Sylowgruppen besitzt, weglässt.

3.6 Beispiel: Sei $P = N \leftthreetimes S$, $N = \langle n \rangle$, $S = \langle s \rangle$, $n^{2^{\gamma-1}} = s^2 = 1$, $n^s = n^{-1}$ eine Diedergruppe der Ordnung 2^γ, $\gamma \geq 4$. Dann ist die Stufe von P gleich 2. P besitzt aber subnormale Untergruppen vom Defekt $\gamma - 1$:
Sei nämlich $S \leq M \trianglelefteq P$. Es ist $P/M \cap N \cong N/M \cap N \leftthreetimes M/M \cap N$. Ist $|P/M \cap N| \geq 8$, so ist $P/M \cap N$ wieder eine Diedergruppe. Dann ist aber $M \trianglelefteq P$. Aus $M \trianglelefteq P$ folgt also $|P/M \cap N| = 4$ und somit $M \trianglelefteq\cdot P$. Da $M \cong (M \cap N) \leftthreetimes S$ wiederum eine Diedergruppe ist, können wir dieselbe Überlegung noch einmal anstellen. Schliesslich folgt, dass $P = \langle n \rangle S \trianglerighteq\cdot \langle n^2 \rangle S \trianglerighteq\cdot \ldots \trianglerighteq\cdot \langle n^{2^{\gamma-1}} \rangle S = S$ eine kürzeste Subnormalkette von P bis S ist.

In 3.3 haben wir die Gruppen charakterisiert, deren Sylowgruppen hamiltonsche Gruppen sind. Wir wollen nun die Gruppen charakterisieren, deren Sylowgruppen modular sind.

3.7 Def.: Sei G eine Gruppe. G heisst eine quasihamiltonsche Gruppe, wenn aus $U \leq G$ stets $U \underset{q}{\leq} G$ folgt [5, S. 7].

Offenbar sind alle hamiltonschen Gruppen auch quasihamiltonsch. Es gilt: [5, S. 7, Theor. 7]

3.8 Satz: Sei G eine Gruppe. Dann sind die folgenden Aussagen gleichwertig:

a) G ist eine quasihamiltonsche Gruppe

b) G ist nilpotent und alle Sylowgruppen von G sind modular.

Dabei sind die modularen p-Gruppen durch den folgenden Satz bestimmt:

3.9 Satz: Sei P eine p-Gruppe. Dann sind die folgenden Aussagen gleichwertig: [5, S. 13, Theor. 14]

a) P ist modular.

b) P ist entweder hamiltonsch oder es existiert ein $t \in P$, ein $N \trianglelefteq P$ und ein $\alpha \in \mathbb{N}$, derart, dass gilt: $P = N\langle t \rangle$, $n^t = n^{p^\alpha + 1}$ für alle $n \in N$. Dabei ist $\alpha \geq 2$, wenn $p = 2$ gilt.

Allgemein lassen sich die (nicht notwendig nilpotenten) Gruppen, deren Sylowgruppen modular sind, durch den folgenden Satz charakterisieren.

3.10 Satz: Sei G eine Gruppe. Dann sind die folgenden Aussagen gleichwertig:

a) Aus $S \trianglelefteq \trianglelefteq U \leq G$ folgt stets $S \underset{sts}{\leq} U$

b) Die Subnormalteilerverbände aller Untergruppen von G sind modular

c) G besitzt nur modulare Sylowgruppen.

Beweis: a) $\Longrightarrow$ b): [1, S. 18, 2.5]

b) $\Longrightarrow$ c): Ist trivial, da in den Sylowgruppen von G alle Untergruppen subnormal sind.

c) $\Longrightarrow$ a): Die Sylowgruppen von G sind modular, also quasihamiltonsch. Daher vererbt sich die Voraussetzung c) auf alle Untergruppen und Faktorgruppen von G. Es genügt zu zeigen, dass aus $S \trianglelefteq \trianglelefteq G$ stets $S \nleqq_s G$ folgt. Sei G ein minimales Gegenbeispiel zu dieser Aussage. Sei S ein möglichst grosser nicht seminormaler Subnormalteiler von G. Sei T ein möglichst grosser Subnormalteiler von G, der mit S nicht vertauschbar ist. Da G ein minimales Gegenbeispiel ist, gilt $S \vee T = G$. Es sei $S^* \not\leq T$. Mit 1.7 gilt dann $S^*T = TS^* > T$. Wegen der Maximalität von T gilt dann $S(S^*T) = (S^*T)S$, also ST = TS im Widerspruch zur Annahme. Also ist $S^* \leq T$. Ebenso folgt $T^* \leq S$. Also ist $S^*T^* \leq S \cap T$. Nach Lemma 1.8 gilt nun $G^* = (S \vee T)^* = S^*T^* \leq S \cap T$. Ist $G^* > 1$, so folgt $(S/G^*)(T/G^*) = (T/G^*)(S/G^*)$, also ST = TS, da G ein minimales Gegenbeispiel ist. Also ist $G^* = 1$. Nun ist G nilpotent. Aus 3.8 folgt, dass G eine quasihamiltonsche Gruppe ist und wir bekommen ST = TS. G ist somit kein Gegenbeispiel.

q. e. d.

Wir bemerken, dass insbesondere in allen Gruppen G, deren Sylowgruppen abelsch sind, alle Subnormalteiler von G stets stark seminormale Untergruppen von G sind, dass solche Gruppen stets einen modularen Subnormalteilerverband besitzen und dass alle Subnormalteiler solcher Gruppen stets von der Fittinggruppe von G normalisiert werden.

§ 4 Gruppen, deren sämtliche Quasinormalteiler normal sind.

Die Quasinormalteiler von endlichen Gruppen weichen nach 1.6 nicht sehr stark von der Normalität ab. Wir untersuchen nun Gruppen, in denen die Quasinormalteiler normal sind.

4.1 Def.: Die Gruppe G heisst eine q-n-Gruppe, wenn aus $Q \trianglelefteq_q G$ stets $Q \trianglelefteq G$ folgt.

Untergruppen von q-n-Gruppen brauchen nicht notwendig wieder q-n-Gruppen zu sein.

4.2 Beispiel: Sei K eine Gruppe, in der quasinormale nichtnormale Untergruppen existieren. Offenbar ist $|K| = \nu > 5$. Wir betten K in die symmetrische Gruppe S_ν ein. S_ν ist eine q-n-Gruppe, da sogar alle Subnormalteiler von S_ν Normalteiler sind. Die Untergruppe $K < S_\nu$ ist jedoch keine q-n-Gruppe.

Wir werden später (5.14) eine überauflösbare q-n-Gruppe der Ordnung $54 = 3^3.2$ konstruieren, deren (normale) 3-Sylowgruppe jedoch keine q-n-Gruppe ist. Die q-n-Eigenschaft vererbt sich also auch in überauflösbaren Gruppen nicht notwendig auf Untergruppen. Sie vererbt sich i. a. auch nicht auf Normalteiler und auch nicht auf Hallgruppen.

Jedoch folgt aus 1.2 e) sofort:

4.3 Lemma: Ist G eine q-n-Gruppe, ist $N \trianglelefteq G$, so ist auch G/N eine q-n-Gruppe.

Hieraus ergibt sich unmittelbar:

4.4 Lemma: Ist G eine p-nilpotente q-n-Gruppe, so sind auch die p-Sylowgruppen von G wieder q-n-Gruppen. Ist G eine nilpotente q-n-Gruppe, so ist jede Sylowgruppe von G wieder eine q-n-Gruppe.

Aus 2.1 ergibt sich:

4.5 Satz: Die Gruppe G besitze nur nichtabelsche Kompositionsfaktorgruppen. Dann ist G und jeder Subnormalteiler von G eine q-n-Gruppe.

Wichtig für die Behandlung der q-n-Gruppen ist der folgende Satz.

4.6 Satz: Sei G eine beliebige Gruppe. Sei H eine Hallgruppe von G. Ist H eine q-n-Gruppe, so normalisiert H jede quasinormale Untergruppe von G.

Beweis: Induktion nach $|G|$: Für $|G| = 1$ ist nichts zu zeigen. Sei $|G| > 1$, sei $Q \trianglelefteq_q G$. Es ist zu zeigen $H \leq \mathcal{N}_G(Q)$. Q ist mit H vertauschbar. Es sei zunächst $U := QH < G$. Es gilt $|U| < |G|$. H ist eine Hallgruppe von U und es ist $Q \trianglelefteq_q U$. Damit hat man nach Induktionsvoraussetzung $H \leq \mathcal{N}_U(Q) \leq \mathcal{N}_G(Q)$ und wir sind fertig.

Sei also $QH = G$.

Sei $N := Q_G > 1$. Dann ist $|G/N| < |G|$. Es gilt $Q/N \trianglelefteq_q G/N$ und HN/N ist eine Hallgruppe von G/N. Es ist $HN/N \cong H/H \cap N$, also ist HN/N eine q-n-Gruppe nach 4.3. Also gilt nach Induktionsvoraussetzung $HN/N \leq \mathcal{N}_{G/N}(Q/N)$, also $H \leq \mathcal{N}_G(Q)$. Wir können also annehmen, dass $N = 1$

gilt. Nun ist Q nilpotent nach 1.6. Es gilt $Q \cap H \trianglelefteq_q H$, also $Q \cap H \trianglelefteq H$, da H eine q-n-Gruppe ist. Aus $Q \trianglelefteq\trianglelefteq G$ folgt, dass $Q \cap H$ eine Hallgruppe von Q ist. Wegen der Nilpotenz von Q folgt dann aber $Q \cap H \trianglelefteq Q$. Somit gilt $Q \cap H \trianglelefteq QH = G$, also $Q \cap H = 1$, da $Q_G = 1$ ist. Nun ist Q als Komplement von H selbst eine Hallgruppe von G. Da subnormale Hallgruppen von G jedoch Normalteiler von G sind, folgt $Q \trianglelefteq G$, also sicherlich $H \leq \mathcal{N}_G(Q)$.

q. e. d.

Aus Satz 4.6 folgen nun hinreichende Bedingungen dafür, dass die Gruppe G eine q-n-Gruppe ist:

4.7 Satz: Sei G eine Gruppe.

a) Sind alle Sylowgruppen von G q-n-Gruppen, so ist G eine q-n-Gruppe.

b) Ist S eine Sylowgruppe von G, die in keinem von G verschiedenen Normalteiler von G liegt, und ist S eine q-n-Gruppe, so ist G eine q-n-Gruppe.

Beweis: a) Nach 4.6 normalisieren alle Sylowgruppen von G jeden Quasinormalteiler von G. Die Sylowgruppen von G erzeugen aber ganz G.

b) Die Konjugierten von S erzeugen nach Voraussetzung ganz G. Jede Konjugierte S^g $(g \in G)$ ist aber eine q-n-Gruppe und normalisiert deshalb nach 4.6 jeden Quasinormalteiler von G.

q. e. d.

Als Anwendung von 4.7 b) sei erwähnt:

4.8 Satz: Besitzt die Gruppe G zu einem Primteiler der Gruppenordnung eine normalisatorgleiche abelsche Sylowgruppe, so ist G eine q-n-Gruppe.

Beweis: Sei S eine normalisatorgleiche abelsche Sylowgruppe von G. Jedenfalls ist dann S eine q-n-Gruppe. Aus $S = \mathfrak{N}_G(S) \leq U \leq G$ folgt dann $\mathfrak{N}_G(U) = U$ [3, S. 34, 7.6]. Insbesondere liegt dann S in keinem von G verschiedenen Normalteiler von G. Die Voraussetzung von 4.7 b) ist also erfüllt und es folgt die Behauptung.

q. e. d.

§ 5 Gruppen, in deren sämtlichen Untergruppen Quasinormalität und Normalität zusammenfallen.

Aus 4.7 a) folgt sofort: Ist G eine Gruppe, deren Sylowgruppen hamiltonsch sind, so sind G und alle Untergruppen von G stets q-n-Gruppen. Die Klasse der Gruppen, deren sämtliche Untergruppen q-n-Gruppen sind ist jedoch grösser als die Klasse der Gruppen, deren Sylowgruppen hamiltonsch sind. Die Klasse der Gruppen, deren sämtliche Untergruppen q-n-Gruppen sind soll nun charakterisiert werden.

Wir zeigen zunächst folgenden Satz, welcher eine Beziehung zwischen den Begriffen "quasinormal", "seminormal" und "stark seminormal" herstellt.

5.1 Satz: Sei G eine Gruppe. Dann sind die folgenden Aussagen gleichwertig:

a) Aus $Q \underset{q}{\leq} U \leq G$ folgt stets $Q \trianglelefteq U$

b) Aus $S \underset{s}{\leq} U \leq G$ folgt stets $F(U) \leq \mathcal{N}_U(S)$

c) Aus $T \underset{sts}{\leq} U \leq G$ und $T \leq H(U)$ folgt stets $T \trianglelefteq U$.

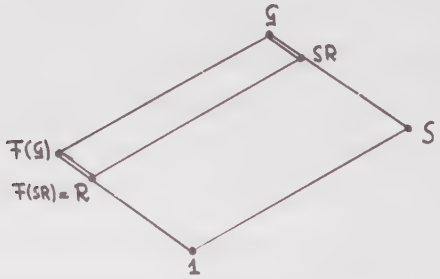
Bemerkung: Es ist i. a. nicht richtig, dass die Seminormalteiler von q-n-Gruppen von der Fittinggruppe normalisiert werden (vgl. Beispiel 5.14). Setzt man die in a) b) c) an alle Untergruppen von G gestellten Forderungen nur für die Gruppe G selbst voraus, so bekommt man also i. a. keine gleichwertigen Aussagen.

Beweis: a) $\Longrightarrow$ b): Die Klasse der Gruppen, die die Voraussetzung a) erfüllen ist bezüglich Untergruppen- und Faktorgruppenbildung abgeschlossen. Sei G ein minimales Gegenbeispiel zur Aussage b). Sei $S \underset{s}{\leq} G$ und

$F(G) \not\leq \mathfrak{N}_G(S)$. Ist $F(G)S < G$, so gilt $F(G)S \leq M \lhd G$ für einen maximalen Normalteiler M von G. Es gilt $S \not\leq_s M$. Wegen $|M| < |G|$ gilt dann $F(G) = F(G) \cap M = F(M) \not\leq \mathfrak{N}_G(S)$ im Widerspruch zur Annahme. Sei also $F(G)S = G$.

Angenommen, es ist $S_G > 1$. Sei $1 \neq X \trianglelefteq G$ mit $X \leq S$. Dann ist $|G/X| < |G|$. Es gilt $S/X \not\leq_s G/X$, also gilt $F(G/X) \not\leq \mathfrak{N}_{G/X}(S/X)$. Es ist $F(G)X/X \cong F(G)/F(G) \cap X$. Also ist $F(G)X/X$ ein nilpotenter Normalteiler von G/X und somit gilt $F(G)X/X \leq F(G/X) \not\leq \mathfrak{N}_{G/X}(S/X)$. Hieraus folgt aber $F(G) \not\leq \mathfrak{N}_G(S)$ im Widerspruch zur Annahme. Sei also $S_G = 1$.

Es ist $S \cap F(G) \not\leq_s F(G)$. Da $F(G)$ nilpotent ist, gilt $S \cap F(G) \not\leq_q F(G)$, also nach Voraussetzung $S \cap F(G) \trianglelefteq F(G)$. Wegen $S \cap F(G) \trianglelefteq S$ folgt also $S \cap F(G) \trianglelefteq F(G)S = G$. Wegen $S_G = 1$ ist somit $S \cap F(G) = 1$. Die Gruppen S und $F(G)$ sind also komplementär.

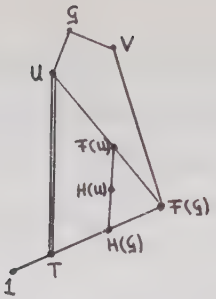


Sei $R \lhd F(G)$. Dann ist $R \trianglelefteq \trianglelefteq G$. Wegen $S \not\leq_s G$ ist R mit S vertauschbar. SR ist also eine Gruppe. Es gilt $SR \trianglelefteq \trianglelefteq G$. Nun ist $|G:S| = |G:SR||SR:S| = |F(G):R||R:1| = |F(G):1|$. Es ist $|SR:S| = |R:R \cap S| = |R:1|$. Damit folgt

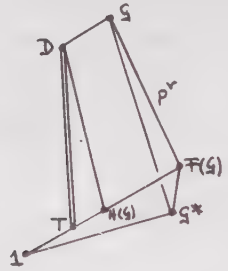
$|G:SR| = |F(G):R|$. Also ist SR eine subnormale Untergruppe mit Primzahlindex von G. Somit ist $SR \trianglelefteq G$. Es ist $|SR| < |G|$ und $S \not\leq_s SR$, also $F(SR) \leq \mathcal{N}_G(S)$. Wegen $SR \trianglelefteq G$ folgt nun $F(SR) = SR \cap F(G)$. Es gilt $SR \cap F(G) = (S \cap F(G))R = 1 \cdot R = R$. Also ist $F(SR) = R$ und es folgt $R \leq \mathcal{N}_G(S)$.

Besitzt nun F(G) zwei verschiedene maximale Normalteiler, $R_1, R_2 \trianglelefteq F(G)$, so folgt also $R_1, R_2 \leq \mathcal{N}_G(S)$ und damit auch $F(G) = R_1 R_2 \leq \mathcal{N}_G(S)$. Wir können somit annehmen, dass F(G) genau einen maximalen Normalteiler besitzt. Wegen der Nilpotenz von F(G) fallen aber die maximalen Normalteiler von F(G) mit den maximalen Untergruppen zusammen. F(G) besitzt somit genau eine maximale Untergruppe und ist daher zyklisch von Primzahlpotenzordnung. Damit ist auch $|G:S| = |F(G)|$ eine Primzahlpotenz. Mit 1.2 f) erhält man, dass auch $|G| = |G:1| = |G:S_G|$ eine Primzahlpotenz ist. G ist also eine p-Gruppe. Aus $S \not\leq_s G$ folgt also $S \not\leq_q G$, also nach Voraussetzung $S \trianglelefteq G$. Damit gilt $F(G) = G \leq \mathcal{N}_G(S)$. G ist also kein Gegenbeispiel.

b) $\Longrightarrow$ c): Die Klasse der Gruppen, die die Voraussetzung b) erfüllen ist bezüglich Untergruppenbildung abgeschlossen. Sei G ein minimales Gegenbeispiel zur Aussage c). Sei $T \not\leq_{sts} G$ und $T \leq H(G)$ und sei $T \not\trianglelefteq G$. Es gilt dann $T \leq H(G) \leq F(G)$. Sei $F(G) \leq U < G$. Dann gilt $T \not\leq_{sts} U$ und $T \leq H(G) \leq H(U)$. Wegen $|U| < |G|$ gilt dann $T \trianglelefteq U$. Besitzt



G zwei verschiedene maximale Untergruppen $U,V \lneq G$ mit $F(G) \leq U,V$, so folgt also $T \trianglelefteq U$ und $T \trianglelefteq V$, also auch $T \trianglelefteq U \vee V = G$. $G/F(G)$ besitzt also genau eine maximale Untergruppe und ist somit zyklisch von Primzahlpotenzordnung. Insbesondere ist G auflösbar von der nilpotenten Länge ≤ 2. Sei D ein Systemnormalisator von G. Dann gilt $H(G) \leq D$



nach [3, S. 729, 11.11 c)]. Also gilt $T \trianglelefteq D$. D ist nilpotent [3, S. 726, 11.2 a)]. Wegen $T \underset{sts}{\leq} G$ ist $T \underset{s}{\leq} D$. Nach Voraussetzung gilt somit $D = F(D) \leq \mathfrak{N}_D(T) \leq \mathfrak{N}_G(T)$. Ist G^* der kleinste Normalteiler von G mit nilpotenter Faktorgruppe, so ist DG^*/G^* ein Systemnormalisator der nilpotenten Gruppe G/G^* [3, S. 726, 11.3]. Damit folgt $DG^* = G$. Da G die nilpotente Länge ≤ 2 besitzt, folgt $G^* \leq F(G)$. Es ist $T \underset{s}{\leq} F(G)$, also nach Voraussetzung

$F(G) \leq \mathfrak{N}_G(T)$. Also ist $G^* \leq \mathfrak{N}_G(T)$. Damit gilt auch $G = G^*D \leq \mathfrak{N}_G(T)$ und somit $T \trianglelefteq G$. G ist also kein Gegenbeispiel.

c) $\Longrightarrow$ a): Wir müssen zeigen, dass unter der Voraussetzung c) alle Untergruppen von G q-n-Gruppen sind. Sei $U \leq G$. Sei P eine Sylowgruppe von U. Sei $Q \leqq_q P$. Dann gilt $Q \leqq_{sts} P$ und $Q \leq H(P) = P$. Also ist nach Voraussetzung c): $Q \trianglelefteq P$. P ist also eine q-n-Gruppe. Mit 4.7 a) folgt dann, dass U eine q-n-Gruppe ist.

q. e. d.

5.2 Def.: Sei $\mathfrak{Q} = \{ G \mid Q \leqq_q U \leq G \Longrightarrow Q \trianglelefteq U \}$ die Klasse aller Gruppen, deren sämtliche Untergruppen q-n-Gruppen sind. $\mathfrak{Q}$ ist also identisch mit der Klasse aller Gruppen, in denen die drei (gleichwertigen) Aussagen von 5.1 gelten.

5.3 Def.: Sei G eine Gruppe. Jede Faktorgruppe U/M, wobei $M \trianglelefteq U \leq G$ gilt, nennen wir einen Abschnitt von G.

5.4 Def.: Sei $\mathfrak{K}$ eine bezüglich Untergruppen- und Faktorgruppenbildung abgeschlossene Klasse von Gruppen. Jede Gruppe K, die keine $\mathfrak{K}$-Gruppe ist, deren echte Untergruppen $U < K$ und echte Faktorgruppen K/X ($1 \neq X \trianglelefteq K$) jedoch $\mathfrak{K}$-Gruppen sind, heisst eine $\mathfrak{K}$-kritische Gruppe.

Die $\mathfrak{K}$-kritischen Gruppen sind also die minimalen Gegenbeispiele zu der i. a. nicht richtigen Aussage: "Jede Gruppe ist eine $\mathfrak{K}$-Gruppe".

5.5 Satz: Sei $\mathcal{K}$ eine bezüglich Untergruppen- und Faktorgruppenbildung abgeschlossene Klasse von Gruppen. Sei G eine Gruppe. Dann sind die folgenden Aussagen gleichwertig:

a) $G \in \mathcal{K}$

b) Kein Abschnitt von G ist $\mathcal{K}$-kritisch.

Beweis: a) $\Longrightarrow$ b): Ist $G \in \mathcal{K}$ und ist U/M ein Abschnitt von G, so gilt auch $U/M \in \mathcal{K}$, da $\mathcal{K}$ bezüglich Untergruppen- und Faktorgruppenbildung abgeschlossen ist. Insbesondere ist U/M nicht $\mathcal{K}$-kritisch.

b) $\Longrightarrow$ a): Sei $G \notin \mathcal{K}$. Dann ist $\mathcal{M} = \{U/M \mid U/M \notin \mathcal{K}, M \trianglelefteq U \trianglelefteq G\} \neq \emptyset$, da $G/1 \in \mathcal{M}$. Da G endlich ist, können wir einen minimalen Abschnitt U_o/M_o in $\mathcal{M}$ wählen. Dann ist U_o/M_o keine $\mathcal{K}$-Gruppe, aber jede echte Untergruppe und jede echte Faktorgruppe von U_o/M_o ist eine $\mathcal{K}$-Gruppe. Also ist U_o/M_o $\mathcal{K}$-kritisch.

q. e. d.

5.6 Def.: Sei $\mathcal{K}$ eine bezüglich Untergruppen- und Faktorgruppenbildung abgeschlossene Klasse von Gruppen. $\mathcal{K}$ heisst eine Sylowklasse, wenn für jede Gruppe G gilt: G ist eine $\mathcal{K}$-Gruppe, genau dann, wenn alle Sylowgruppen von G $\mathcal{K}$-Gruppen sind.

5.7 Satz: Sei $\mathcal{K}$ eine bezüglich Untergruppen- und Faktorgruppenbildung abgeschlossene Klasse von Gruppen. Dann sind die folgenden Aussagen gleichwertig:

a) $\mathcal{K}$ ist eine Sylowklasse

b) Jede $\mathcal{K}$-kritische Gruppe ist eine p-Gruppe.

Beweis: a) $\Longrightarrow$ b): Sei $\mathcal{K}$ eine Sylowklasse. Sei K eine $\mathcal{K}$-kritische Gruppe. Ist K keine p-Gruppe, so sind die Sylowgruppen von K echte Untergruppen von K, also $\mathcal{K}$-Gruppen. Da $\mathcal{K}$ eine Sylowklasse ist, ist dann auch K eine $\mathcal{K}$-Gruppe im Widerspruch zur Annahme, dass K eine $\mathcal{K}$-kritische Gruppe ist.

b) $\Longrightarrow$ a): Sei umgekehrt jede $\mathcal{K}$-kritische Gruppe eine p-Gruppe. Sei G eine Gruppe, deren sämtliche Sylowgruppen $\mathcal{K}$-Gruppen sind. Angenommen G ist keine $\mathcal{K}$-Gruppe. Dann besitzt G nach 5.5 einen $\mathcal{K}$-kritischen Abschnitt U/M. U/M ist nach Voraussetzung eine p-Gruppe. Sei S_1 eine p-Sylowgruppe von U und sei S eine p-Sylowgruppe von G mit $S_1 \leq S$. Dann ist S_1M/M eine p-Sylowgruppe von U/M, also $S_1M = U$. Nun ist $U/M = S_1M/M \cong S_1/S_1 \cap M$. $S_1/S_1 \cap M$ ist also ein $\mathcal{K}$-kritischer Abschnitt von S. Mit 5.5 gilt somit $S \notin \mathcal{K}$ im Widerspruch zur Annahme.

q. e. d.

5.8 Satz: Sei $\mathcal{K}$ eine Sylowklasse. Sei G eine Gruppe. Dann sind die folgenden Aussagen gleichwertig:

a) $G \in \mathcal{K}$

b) Keine Sylowgruppe von G besitzt einen $\mathcal{K}$-kritischen Abschnitt.

Dieser Satz besagt also, dass die Zugehörigkeit einer Gruppe G zu einer Sylowklasse $\mathcal{K}$ entschieden ist, wenn man die innere Struktur der Sylowgruppen von G kennt. Sie ist unabhängig von den Einbettungseigenschaften der Sylowgruppen.

Der Beweis von 5.8 ergibt sich unmittelbar aus 5.5 und 5.6.

Bemerkung: Die Klasse aller Gruppen, in deren sämtlichen Untergruppen die Subnormalteiler stets von der Fittinggruppe normalisiert werden, ist nach 3.3 eine Sylowklasse. Ebenso ist die Klasse aller Gruppen, deren sämtliche Untergruppen einen modularen Subnormalteilerverband besitzen, eine Sylowklasse nach 3.10.

5.9 Satz: Die Klasse $\mathfrak{Q}$ aller Gruppen, deren sämtliche Untergruppen q-n-Gruppen sind, ist eine Sylowklasse.

Beweis: $\mathfrak{Q}$ ist abgeschlossen bezüglich Untergruppen- und Faktorgruppenbildung. Sei G eine Gruppe, deren sämtliche Sylowgruppen $\mathfrak{Q}$-Gruppen sind. Sei $U \leq G$. Sei P_1 eine Sylowgruppe von U. Dann gilt $P_1 \leq P$ für eine Sylowgruppe P von G. Aus $P \in \mathfrak{Q}$ folgt $P_1 \in \mathfrak{Q}$. Insbesondere ist P_1 eine q-n-Gruppe. Mit 4.7 a) folgt dann, dass U eine q-n-Gruppe ist. Also gilt $G \in \mathfrak{Q}$.

q. e. d.

Wir wissen nun: Jede $\mathfrak{Q}$-kritische Gruppe ist eine p-Gruppe und eine Gruppe G ist genau dann eine $\mathfrak{Q}$-Gruppe, wenn die Sylowgruppen von G keinen $\mathfrak{Q}$-kritischen Abschnitt besitzen. Anstelle von "$\mathfrak{Q}$-kritische Gruppe" wollen wir im folgenden einfach "kritische Gruppe" sagen.

Wir bestimmen nun die Struktur der kritischen Gruppen.

5.10 Satz: Sei K eine kritische Gruppe. Dann gelten die folgenden Aussagen:

a) K ist keine q-n-Gruppe. Jede echte Untergruppe und jede echte Faktorgruppe von K ist eine q-n-Gruppe.

b) Ist Q eine quasinormale nichtnormale Untergruppe von K, so liegt Q in genau einer maximalen Untergruppe M von K. M ist der Normalisator von Q, daher besitzt Q genau p Konjugierte. Q hat die Ordnung p.

c) Es gilt $|K'| = p$.

d) Es gilt $|K: \Phi(K)| = p^2$, K wird also von 2 Elementen erzeugt.

e) K besitzt genau eine nichtzyklische und genau p zyklische maximale Untergruppen.

f) K ist isomorph zum semidirekten Produkt $K = N \leftthreetimes Q$ einer zyklischen Gruppe $N = \langle n \rangle$ der Ordnung $p^{\gamma-1}$ mit einer zyklischen Gruppe $Q = \langle s \rangle$ der Ordnung p wobei $\gamma \geq 3$, $n^s = n^{p^{\gamma-2}+1}$ und $p^\gamma \neq 8$ gilt.

Beweis: a) Jede echte Untergruppe und jede echte Faktorgruppe von K ist eine $\mathfrak{N}$-Gruppe, K selbst jedoch nicht. Damit ist jede echte Untergruppe und jede echte Faktorgruppe von K auch eine q-n-Gruppe. Wäre K eine q-n-Gruppe, so wäre K doch wieder eine $\mathfrak{N}$-Gruppe. Also ist K keine q-n-Gruppe.

b) Sei $Q \leqq_q K$, $Q \not\trianglelefteq K$. Angenommen, es gilt $Q \leqq M_\lambda \lhd K$ ($\lambda = 1,2$), $M_1 \neq M_2$. Dann gilt $Q \leqq_q M_\lambda$, also $Q \trianglelefteq M_\lambda$, da die M_λ q-n-Gruppen sind. Dann wäre aber $Q \trianglelefteq M_1 M_2 = K$ im Widerspruch zur Annahme. Sei M die eindeutig bestimmte maximale Untergruppe von K mit $Q \leqq M$. Wegen $Q \not\trianglelefteq M$ gilt

$M \leq \mathcal{N}_K(Q)$. Wegen $Q \not\trianglelefteq K$ gilt $M = \mathcal{N}_K(Q)$. Da K nicht-zyklisch ist, besitzt K ausser M eine weitere maximale Untergruppe $W \lhd\cdot K$. Dann gilt $Q \not\leq W$, also $QW = K$. Es gilt $Q \cap W \leqq_q W$, also $Q \cap W \trianglelefteq W$, da W eine q-n-Gruppe ist. Wegen $W \trianglelefteq K$ gilt $Q \cap W \trianglelefteq Q$, also $Q \cap W \trianglelefteq QW = K$. Es ist $Q_K = 1$, da alle echten Faktorgruppen von K q-n-Gruppen sind. Damit folgt $Q \cap W = 1$. Die Gruppen Q und W sind also komplementär. Es folgt $|Q| = |K:W| = p$.

c) Wähle ein $g \in K$ mit $Q \neq Q^g$. Dann ist $R := QQ^g$ eine quasinormale Untergruppe von K. Also gilt $R \trianglelefteq K$ nach b). K/R besitzt nach b) genau eine maximale Untergruppe und ist somit zyklisch. Insbesondere gilt $K' \leq R$. Setze $\Phi = \Phi(K)$. Es ist K/Φ eine elementarabelsche Gruppe. Insbesondere gilt $K' \leq \Phi$. $K/R\Phi$ ist elementarabelsch und zyklisch, also $|K/R\Phi| \leq p$. Es gilt $R\Phi \leq M$, also ist $|K/R\Phi| \geqslant p$. Es folgt $|K/R\Phi| = p$ und daher $R\Phi \lhd\cdot K$. Da K/R zyklisch ist, folgt $R\Phi = M$. Es ist $R \not\leq \Phi$, sonst wäre $M = R\Phi = \Phi$. Dann wäre aber K zyklisch, was nicht richtig ist. Somit gilt $R \cap \Phi < R$. Da K nicht-abelsch ist und da $K' \leq R \cap \Phi$ gilt, folgt $1 < R \cap \Phi$. Es gilt also $1 < K' \leq R \cap \Phi < R$. Wegen $|R| = p^2$ folgt somit $K' = R \cap \Phi$, also $|K'| = p$.

d) Es gilt $|K| = p|M| = p\,\frac{|R||\Phi|}{|R \cap \Phi|} = p^2|\Phi|$, also $|K:\Phi| = p^2$.

e) Nach d) besitzt K genau $p + 1$ maximale Untergruppen. Die maximale Untergruppe M ist nichtzyklisch, da sie alle Konjugierten von Q enthält. Sei $P \lhd\cdot K$, $P \neq M$. Sei $Z \lhd\cdot P$. Wegen $Q \not\leq P$ gilt $Q \not\leq Z$, also $Q \cap P = Q \cap Z = 1$.

Q ist mit Z vertauschbar. Damit ist $QZ \trianglelefteq K$. Wegen $Q \leq QZ$, folgt $QZ = M$ nach b). Nach d) ist $P \cap M = \Phi$. Damit folgt $\Phi = P \cap M = P \cap QZ = (P \cap Q)Z = 1 \cdot Z = Z$. P besitzt also nur die eine maximale Untergruppe Φ und ist somit zyklisch.

f) Sei $N = \langle n \rangle$ eine zyklische maximale Untergruppe von K. Dann gilt $Q \not\leq N$. Es ist somit $QN = K$ und $Q \cap N = 1$. Sei etwa $Q = \langle t \rangle$. Wir bestimmen n^t: Es gilt $K' \leq N$. wegen $|K'| = p$ folgt $K' = \langle n^{p^{\gamma-2}} \rangle$. Somit gilt $n^t \equiv n \mod \langle n^{p^{\gamma-2}} \rangle$, also $n^t = nn^{\lambda p^{\gamma-2}} = n^{\lambda p^{\gamma-2}+1}$ $(1 \leq \lambda \leq p-1)$. Wählt man als Erzeugende von Q das Element $s = t^\nu$ mit $\nu\lambda \equiv 1 \mod p$, so erhält man $n^s = n^{t^\nu} = n^{(\lambda p^{\gamma-2}+1)^\nu} = n^{p^{\gamma-2}+1}$, also die gewünschte Darstellung. Dies ergibt sich leicht, wenn man den Ausdruck $(\lambda p^{\gamma-2}+1)^\nu$ in eine Binomialreihe entwickelt: Es gilt $(\lambda p^{\gamma-2}+1)^\nu =$

$$= \sum_{\varrho=0}^{\nu} \binom{\nu}{\varrho} (\lambda p^{\gamma-2})^\varrho = 1 + \nu\lambda p^{\gamma-2} + \sum_{\varrho \geq 2} \binom{\nu}{\varrho} (\lambda p^{\gamma-2})^\varrho$$

$$\equiv 1 + p^{\gamma-2} \mod p^{\gamma-1}.$$

Es ist $p^\gamma \neq 8$. Wäre $p = 2$ und $\gamma = 3$, so wäre $n^s = n^{-1}$. Dann wäre K eine Diedergruppe der Ordnung 8. Diese besitzt jedoch 2 nichtzyklische maximale Untergruppen, was e) widerspricht.

q. e. d.

Wir zeigen nun: Zu jeder Primzahlpotenz p^γ mit $\gamma \geq 3$ und $p^\gamma \neq 8$ gibt es eine (bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte) kritische Gruppe.

5.11 Satz: Sei $K = N \rtimes Q$ das semidirekte Produkt einer zyklischen Gruppe $N = \langle n \rangle$ der Ordnung $p^{\gamma-1}$ mit einer zyklischen Gruppe $Q = \langle s \rangle$ der Ordnung p mit $\gamma \geq 3$, $n^s = n^{p^{\gamma-2}+1}$ und sei $p^\gamma \neq 8$. Dann gilt:

a) $K' = \langle n^{p^{\gamma-2}} \rangle$, $Z(K) = \Phi(K) = \langle n^p \rangle$.

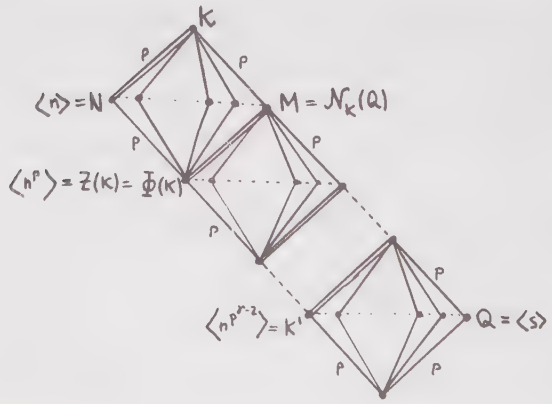
b) Ist $T \leq K$, $|T| \geq p^2$, so gilt $K' \leq T$, insbesondere ist $T \trianglelefteq K$.

c) Jede echte Untergruppe von K ist abelsch. K' ist der einzige Normalteiler der Ordnung p von K. Jede echte Faktorgruppe von K ist abelsch.

d) K besitzt genau eine nichtzyklische und genau p zyklische maximale Untergruppen.

e) K besitzt genau p + 1 Untergruppen der Ordnung p. Diese liegen alle in der eindeutig bestimmten nichtzyklischen (abelschen) maximalen Untergruppe und sind daher miteinander vertauschbar.

f) Die Untergruppe Q und ihre Konjugierten sind quasinormale nichtnormale Untergruppen von K.



Beweis: a) Setze $H := \langle n^{p^{\mu-2}} \rangle$. Dann ist K/H abelsch, also $K' \leq H$. Da K nichtabelsch ist, folgt $K' = H$. Es ist $|K : \Phi(K)| = p^2$, da K von 2 Elementen erzeugt wird. Wegen $\Phi(K) < N$ ist dann $\Phi(K) = \langle n^p \rangle$. Es gilt $(n^p)^s = n^{(p^{\mu-2}+1)p} = n^p$. Also ist $Z(K) \geq \Phi(K)$. Da K/Z(K) nicht zyklisch sein kann, folgt $Z(K) = \Phi(K)$.

b) Sei $T \leq K$, $|T| \geq p^2$. Es ist $|K| \geq |TN| = \frac{|T|\,|N|}{|T \cap N|} \geq$ $\geq \frac{p^2\,|K|}{|T \cap N|\,p} = \frac{p|K|}{|T \cap N|}$, also $|T \cap N| \geq p$. K' ist die einzige Untergruppe der Ordnung p von N. Damit gilt $K' \leq T \cap N \leq T$.

c) Wir zeigen, dass alle maximalen Untergruppen von K abelsch sind: Sei $P \lhd K$. Dann gilt $Z(K) = \Phi(K) \lhd P$. Es ist $Z(P) \geq Z(K)$. Daher ist P/Z(P) zyklisch und somit $P = Z(P)$.

Sei $U \lhd K$, $|U| = p$. Dann ist U elementweise vertauschbar mit Q und mit N, also gilt $U \leq Z(K)$. Daher ist $U = K'$. Ist nun $1 \neq X \lhd K$, so gilt $K' \leq X$. Also ist K/X abelsch.

d) Wegen $|K : \Phi(K)| = p^2$ besitzt K genau p + 1 maximale Untergruppen. Sei $M \lhd K$ mit $Q \leq M$. Dann ist M nichtzyklisch, da M alle Konjugierten von Q enthält. Wir zeigen: Die Elemente ns^ν ($\nu = 0, \ldots, p-1$) haben sämtlich die Ordnung $p^{\mu-1}$ und sie erzeugen p verschiedene (maximale) Untergruppen. Wegen $K' \leq Z(K)$ sind alle Kommutatoren von K mit allen Elementen von K vertauschbar. Es gilt nach [3, S. 253, 1.3]:

$$(ns^\nu)^\mu = n^\mu s^{\nu\mu} [s^\nu, n]^{\binom{\mu}{2}} = n^\mu s^{\nu\mu} [s, n]^{\nu\binom{\mu}{2}} = n^\mu ((n^s)^{-1} n)^{\nu\binom{\mu}{2}} s^{\nu\mu}$$

$$= n^{\mu - p^{\mu-2}\nu\binom{\mu}{2}} \cdot s^{\nu\mu}. \text{ Aus } (ns^\nu)^\mu = 1 \text{ folgt nun:}$$

$$\mu - p^{\gamma-2}\nu\binom{\mu}{2} \equiv 0 \bmod p^{\gamma-1}$$

Also $\quad \mu - p^{\gamma-2}\nu\frac{\mu(\mu-1)}{2} = \lambda p^{\gamma-1} \quad (\lambda \in \mathbb{Z})$

oder $\quad \mu(2 - p^{\gamma-2}\nu(\mu-1)) = 2\lambda p^{\gamma-1} \qquad (*)$

Wenn $p \neq 2$ ist, so gilt wegen $\gamma \geq 3$: $p \nmid (2 - p^{\gamma-2}\nu(\mu-1))$, also folgt nach $(*)$: $\mu \equiv 0 \bmod p^{\gamma-1}$.

Ist $p = 2$ und $\gamma \geq 4$, so folgt aus $(*)$:

$$\mu(2 - 2^{\gamma-2}\nu(\mu-1)) = 2\lambda \cdot 2^{\gamma-1}$$

oder $\quad \mu(1 - 2^{\gamma-3}\nu(\mu-1)) = \lambda \cdot 2^{\gamma-1}$.

Wegen $\gamma \geq 4$ gilt nun $2 \nmid (1 - 2^{\gamma-3}\nu(\mu-1))$, also folgt $\mu \equiv 0 \bmod 2^{\gamma-1}$. Die Elemente ns^ν $(\nu = 0,\ldots,p-1)$ besitzen also für $p^\gamma \neq 8$ die Ordnung $p^{\gamma-1}$.

Angenommen, es gilt $ns^\varrho \in \langle ns^\nu \rangle$, etwa $ns^\varrho = (ns^\nu)^\mu = n^{\mu - p^{\gamma-2}\nu\binom{\mu}{2}} \cdot s^{\nu\mu}$ $(0 \leq \nu, \varrho \leq p-1;\ 0 \leq \mu \leq p^{\gamma-1}-1)$. Dann ist

$$\nu\mu \equiv \varrho \bmod p$$

und $\quad \mu - p^{\gamma-2}\nu\frac{\mu(\mu-1)}{2} \equiv 1 \bmod p^{\gamma-1}$.

Hieraus folgt $\quad (\mu-1)(1 - p^{\gamma-2}\frac{\nu\mu}{2}) = \lambda p^{\gamma-1} \quad (\lambda \in \mathbb{Z})$

oder $\quad (\mu-1)(2 - p^{\gamma-2}\nu\mu) = 2\lambda p^{\gamma-1}$.

Wie oben folgt nun wegen $p^\gamma \neq 8$: $\mu - 1 \equiv 0 \bmod p^{\gamma-1}$, also $\mu \equiv 1 \bmod p^{\gamma-1}$ und damit auch $\nu \equiv \varrho \bmod p$.

e) Sei $U \leq K$ mit $|U| = p$. Wenn $U \trianglelefteq K$, so ist $U = K'$ nach c). Wenn $U \not\trianglelefteq K$, dann liegt U in der eindeutig bestimmten nichtzyklischen maximalen Untergruppe M. Diese besitzt als abelsche Gruppe vom Typ $(p^{\gamma-2}, p)$ genau $p + 1$ Untergruppen der Ordnung p, nämlich K' und die Konjugierten

von Q. Also ist U identisch mit einer Konjugierten von Q.

f) Nach e) ist Q vertauschbar mit allen Untergruppen der Ordnung p. Nach b) ist Q auch vertauschbar mit allen übrigen Untergruppen. Also ist $Q \trianglelefteq_q K$.

q. e. d.

Bemerkung: Der Untergruppenverband der kritischen Gruppe der Ordnung p^γ ist isomorph zum Untergruppenverband der abelschen Gruppe vom Typ$(p^{\gamma-1},p)$. Hieraus folgt insbesondere, dass es i. a. unmöglich ist, den Normalteilerbegriff verbandstheoretisch zu charakterisieren. Dagegen ist in nilpotenten $\mathfrak{Q}$-Gruppen eine verbandstheoretische Charakterisierung des Normalteilers möglich. Es gilt:

5.12 Satz: Sei G eine nilpotente $\mathfrak{Q}$-Gruppe. Sei $S \leq U \leq G$. Dann sind die folgenden Aussagen gleichwertig:

a) $S \trianglelefteq U$

b) Für alle $X \leq U$ gilt $j(S \vee X, X) = j(S, S \cap X)$.

Beweis: $S \trianglelefteq U \iff S \trianglelefteq_s U \iff j(S \vee X, X) = j(S, S \cap X)$ für alle $X \leq U$ [6, S. 319, (2.1)].

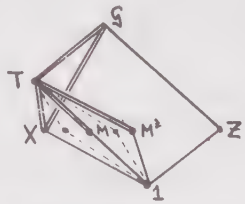
q. e. d.

Die kritischen Gruppen geben Beispiele dafür, dass man i. a. mit den in 1.7 beschriebenen Methoden nicht alle Seminormalteiler der Gruppe erhält: Ist $K = N \leftthreetimes Q$ eine kritische Gruppe, so ist $Q \trianglelefteq_s K$. Q liegt aber in keinem Hauptfaktor von K und es gibt auch keinen Subnormalteiler S von K mit $S^* = Q$.

Im Gegensatz zu den in 1.7 beschriebenen Seminormalteilern wird der Seminormalteiler Q von K nicht von der Fittinggruppe normalisiert.

Alle Seminormalteiler von $\mathfrak{A}$-Gruppen werden nach 5.1 von der Fittinggruppe normalisiert. Die Frage, ob man in $\mathfrak{A}$-Gruppen alle Seminormalteiler mit den Methoden von 1.7 erhält, ist i. a. jedoch zu verneinen. Zwar liegen in allen nilpotenten $\mathfrak{A}$-Gruppen die Seminormalteiler in Hauptfaktoren, denn sie sind normal. Wir zeigen, dass schon in überauflösbaren $\mathfrak{A}$-Gruppen (sogar in überauflösbaren Gruppen mit abelschen Sylowgruppen) Seminormalteiler existieren können, die man nicht mit den Methoden von 1.7 erhält.

5.13 Beispiel: Sei $F = \mathbb{Z}/(7)$ ein Körper mit 7 Elementen. Sei $T = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x,y \in F \right\}$ der 2-dimensionale Vektorraum über F. Sei $z = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \in GL(2,7)$. Dann ist $z^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Es sei $Z = \langle z \rangle$ und $G = T \curlyvee Z$, wobei Z in der natürlichen Weise auf T wirkt: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^z = z \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.



Es ist $X = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in F \right\} \trianglelefteq G$. Daher ist $G \rhd T \rhd X \rhd 1$ eine Hauptreihe von G mit einfachen Faktoren. G ist also überauflösbar. Sei $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \mid x \in F \right\} \in T$. Dann ist $M \trianglelefteq\trianglelefteq G$. Es ist $M \not\trianglelefteq_s G$ nach 3.10 a). Für keine subnormale Unter-

gruppe S von G gilt $S^x = M$ und M liegt auch in keinem Hauptfaktor von G, denn wegen $\binom{x}{x}^z = \binom{2x}{4x} \notin M$ gilt $M \not\trianglelefteq G$.

Zwei den Sätzen 3.4 und 3.5 entsprechende Sätze gelten in $\mathfrak{N}$-Gruppen für die Seminormalteiler anstatt allgemein für die Subnormalteiler: Der Defekt der Seminormalteiler von auflösbaren $\mathfrak{N}$-Gruppen ist nicht grösser als deren nilpotente Länge.

Ist S ein Seminormalteiler der $\mathfrak{N}$-Gruppe G, und ist S/S_G auflösbar von der nilpotenten Länge ς, so gilt $d_G(S) \leq \varsigma + 1$.

Die Beweise sind analog denen von 3.4 und 3.5.

Wir konstruieren nun eine überauflösbare q-n-Gruppe der Ordnung 54, deren 3-Sylowgruppe keine q-n-Gruppe ist.

5.14 Beispiel: Sei $K = N \rtimes Q$ eine kritische Gruppe der Ordnung 27, $N = \langle n \rangle$, $Q = \langle s \rangle$, $n^9 = s^3 = 1$, $n^s = n^4$.

Sei $X = \{x, 1\}$ eine Gruppe der Ordnung 2. Wir definieren für $n^\alpha s^\beta \in K$: $(n^\alpha s^\beta)^x = n^{3\beta-\alpha} s^\beta$ und zeigen, dass x auf K einen Automorphismus der Ordnung 2 bewirkt.

Wegen $K' \leq Z(K)$ gilt nach [3, S. 253, 1.3]: $[s^\beta, n^\alpha] = [s^\beta, n]^\alpha = [s,n]^{\alpha\beta}$. Es ist $[s,n] = (n^s)^{-1} n = n^6$.

Es folgt $(n^\alpha s^\beta)(n^\xi s^\eta) = n^\alpha n^\xi s^\beta [s^\beta, n^\xi] s^\eta = n^{\alpha+\xi+6\beta\xi} s^{\beta+\eta}$ für alle $\alpha, \beta, \xi, \eta \in \mathbb{N}$. Sei $g = n^\alpha s^\beta \in K$ und $h = n^\xi s^\eta \in K$.

Es gilt $(gh)^x = n^{3(\beta+\eta)-(\alpha+\xi+6\beta\xi)} s^{\beta+\eta}$

und $g^x h^x = n^{3\beta-\alpha} s^\beta n^{3\eta-\xi} s^\eta = n^{(3\beta-\alpha)+(3\eta-\xi)+6\beta(3\eta-\xi)} s^{\beta+\eta}$

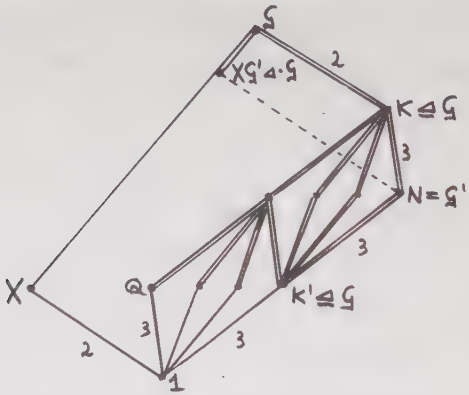
$= n^{3(\beta+\eta)-(\alpha+\xi+6\beta\xi)} s^{\beta+\eta}$. Also ist $(gh)^x = g^x h^x$.

Aus $1 = (n^{\alpha}s^{\beta})^{x} = n^{3\beta-\alpha}s^{\beta}$ folgt $n^{3\beta-\alpha} = s^{\beta} = 1$, also $\beta \equiv 0 \bmod 3$ und damit $n^{-\alpha} = 1$, also $\alpha \equiv 0 \bmod 9$.

x bewirkt also einen Automorphismus auf K. Es ist $(n^{\alpha}s^{\beta})^{x^2} = (n^{3\beta-\alpha}s^{\beta})^{x} = n^{3\beta-(3\beta-\alpha)}s^{\beta} = n^{\alpha}s^{\beta}$. Also hat x die Ordnung 2.

Sei nun $G = K \rtimes X$.

Wir bestimmen die Subnormalteiler von G.



Es ist $N \trianglelefteq G$. Wegen $(n^{\alpha}s^{\beta})^{x} = n^{3\beta-\alpha}s^{\beta} = n^{3\beta-2\alpha}(n^{\alpha}s^{\beta})$ ist K mit X modulo N elementweise vertauschbar und N ist der kleinste Normalteiler von G mit dieser Eigenschaft. Daher gilt $N = G'$. Also gilt $|G:G'| = 6$.

Es ist $XG' \trianglelefteq G$. Wegen $9 \nmid |G:G'|$ ist XG' der einzige Normalteiler von G vom Index 3. G besitzt keinen Subnormalteiler vom Index 27. Wäre $S \trianglelefteq\trianglelefteq G$ mit $|G:S| = 9$, so wäre $S \trianglelefteq G$, da $|G:S_G| = 27$ nicht möglich ist. Dann wäre aber $G' \leq S$, was wegen $9 \nmid |G:G'|$ nicht möglich ist. G, die Gruppe XG' und die Untergruppen von K sind also genau alle Subnormalteiler von G.

Wegen $sx = xs^{x} = xn^{3}s \notin XQ$ ist Q nicht vertauschbar mit X.

Keine Konjugierte von Q ist somit quasinormal in G. Sei $R \lneqq_q G$. Ist $|G:R| = 6$, so gilt $R \lhd K$. Es ist dann $R = RX \cap K \trianglelefteq RX$, also $R \trianglelefteq K(RX) = G$. Ist $|G:R| \neq 6, R \neq G$, so gilt $R = K'$ oder $R = XG'$, also jedenfalls $R \trianglelefteq G$. G ist also eine q-n-Gruppe. G ist uberauflösbar. Die 3-Sylowgruppe von G ist jedoch keine q-n-Gruppe.

Bemerkung: Dieses Beispiel zeigt zugleich, dass die Seminormalteiler von q-n-Gruppen i. a. nicht von der Fittinggruppe normalisiert werden: Es ist $F(G) = K$ und es gilt $Q \lneqq_s G$, aber $K \nleq \mathfrak{N}_G(Q)$. Vergleiche hierzu die Bemerkung von 5.1.

Die Klasse $\mathfrak{Q}$ umfasst alle Gruppen, deren Sylowgruppen hamiltonsch sind. Es gibt jedoch $\mathfrak{Q}$-Gruppen, deren Sylowgruppen nicht durchweg hamiltonsch sind. Da jede kritische Gruppe mindestens den Exponenten p^2 für $p \neq 2$ und mindestens den Exponenten 8 für $p = 2$ besitzt, gilt:

5.15 Satz: Sei G eine Gruppe. Besitzen die nichthamiltonschen Sylowgruppen von G den Exponenten p für $p \neq 2$ bezw. höchstens den Exponenten 4 für $p = 2$, so gilt $G \in \mathfrak{Q}$.

In diesem Zusammenhang ergänzen wir einen Satz von Itô [3, S. 281, 5.2] über minimale nichtnilpotente Gruppen durch die folgende Aussage:

5.16 Satz: Sei G eine minimale nichtnilpotente Gruppe. Dann gelten die folgenden Aussagen:

a) $G \in \mathcal{Q}$

b) Aus $S \leqq_s G$ folgt $d_G(S) \leqq 2$

c) Aus $S \trianglelefteq \trianglelefteq G$ folgt $d_G(S) \leqq 3$.

Beweis: a) Nach [3, S. 281, 5.2] ist $|G| = p^{\alpha} q^{\beta}$ mit verschiedenen Primzahlen p,q und ganzen Zahlen $\alpha, \beta \geqslant 1$. Die p-Sylowgruppe P von G ist ein Normalteiler von G mit dem Exponenten p für $p \neq 2$ bezw. höchstens 4 für $p = 2$. Die q-Sylowgruppen Q von G sind zyklisch. Nach 5.15 gilt somit $G \in \mathcal{Q}$.

b) F(G) ist der eindeutig bestimmte maximale Normalteiler von G. Gilt $S \leqq_s G$ und $S \neq G$, so folgt also $S \leqq F(G)$. Wegen $G \in \mathcal{Q}$ ist $S \trianglelefteq F(G) \trianglelefteq G$ nach 5.1, also gilt $d_G(S) \leqq 2$.

c) Wir betrachten die Gruppe $G/\Phi(P)$. Die Gruppe $G/\Phi(P)$ besitzt nur abelsche Sylowgruppen. Nach 3.10 gilt dann $S\Phi(P) \leqq_s G$. Also gilt nach b): $d_G(S\Phi(P)) \leqq 2$. Nach [3, S. 281, 5.2 b)] gilt aber $\Phi(P) \leqq Z(G)$. Also ist $\Phi(P) \leqq \mathcal{N}_G(S)$, also $S \trianglelefteq S\Phi(P)$ und damit gilt $d_G(S) \leqq 3$.

q. e. d.

§ 6 Gruppen mit kritischen Sylowgruppen.

6.1 Lemma: Sei G eine Gruppe ungerader Ordnung. Die p-Sylowgruppen P von G zum kleinsten Primteiler p von $|G|$ seien elementarabelsch vom Typ(p,p). Dann ist G p-nilpotent.

Beweis: Es ist $|\mathrm{Aut}\ P| = |GL(2,p)| = (p^2 - 1)(p^2 - p) = (p + 1)p(p - 1)^2$ [3, S. 178, 6.2]. Ist q ein Primteiler von $|\mathrm{Aut}\ P|$, so folgt also $q \leq p$, da $p \neq 2$ ist. Da $P \leq \mathcal{C}_G(P) \leq \mathcal{N}_G(P)$ gilt, und da $\mathcal{N}_G(P)/\mathcal{C}_G(P)$ zu einer Untergruppe von Aut P isomorph ist, folgt $\mathcal{N}_G(P) = \mathcal{C}_G(P)$. Daher sind die Voraussetzungen des Satzes [3, S. 419, 2.6] von Burnside erfüllt. Es existiert also ein normales p-Komplement.

q. e. d.

6.2 Lemma: Sei P eine p-Gruppe. P besitze eine charakteristische Reihe mit einfachen Faktoren. Ist dann q ein Primteiler von $|\mathrm{Aut}\ P|$, so folgt $q \leq p$.

Beweis: Angenommen, es gilt $q > p$. Sei $1 \neq \varphi \in \mathrm{Aut}\ P$ mit $\varphi^q = 1$. Wir betrachten $G = P \rtimes \langle\varphi\rangle$. G ist überauflösbar, da P eine charakteristische Reihe mit einfachen Faktoren besitzt. Wegen $q > p$ folgt nun $\langle\varphi\rangle \trianglelefteq G$ nach [3, S. 716, 9.1 c)]. G ist also nilpotent. Dies widerspricht jedoch der Annahme, dass $\varphi \neq 1$ ist.

q. e. d.

Da jede kritische Gruppe eine charakteristische Reihe mit einfachen Faktoren besitzt, gilt 6.2 insbesondere für alle kritischen Gruppen.

Wir beweisen nun die folgende Verallgemeinerung eines Satzes von Wong [3, S. 424, 3.5]. Der Beweis ist im wesentlichen derselbe wie der in der zitierten Stelle wiedergegebene, wo der Satz für p = 2 bewiesen wird.

6.3 Satz: Sei p der kleinste Primteiler von $|G|$. Die p-Sylowgruppen P von G seien kritische Gruppen. Dann ist G p-nilpotent.

Beweis: Sei $P = N \leftthreetimes Q$, $N = \langle n \rangle$, $Q = \langle s \rangle$, $n^{p^{\gamma-1}} = s^p = 1$, $n^s = n^{p^{\gamma-2}+1}$, $\gamma \geq 3$, $p^\gamma \neq 8$.

Es gilt $\mathcal{N}_G(P) = P \leftthreetimes R$, wobei R ein Komplement von P in $\mathcal{N}_G(P)$ ist. $|R|$ enthält nur Primteiler, die grösser als p sind. Nach 6.2 enthält $|\mathrm{Aut}\, P|$ nur Primteiler, die höchstens gleich p sind. Daher ist $\mathcal{N}_G(P) = P \times R$. Also ist $(\mathcal{N}_G(P))' = P'R'$. Nach [3, S. 423, 3.4] ist $P \cap G' = ((\mathcal{N}_G(P))' \cap P) \vee \bigvee_{g \in G} (P \cap P'^g)$. Es ist $(\mathcal{N}_G(P))' \cap P = P'R' \cap P = P'(R' \cap P) = P'$. Also ist $P \cap G' = P' \vee \bigvee_{g \in G} (P \cap P'^g)$.

Da P eine kritische Gruppe ist, gilt $|P'| = p$ und alle Elemente der Ordnung p von P liegen in P'Q. Daher gilt $P \cap G' \trianglelefteq P'Q \lessdot P$. Es ist also $|PG':G'| = |P:P \cap G'| > 1$, also $p \mid |G:G'|$. Also existiert ein S mit $G' \leq S \lhd G$ und $|G:S| = p$. Es ist $P_1 = S \cap P \lhd P$ eine p-Sylowgruppe von S. P_1 ist also entweder zyklisch oder abelsch vom $\mathrm{Typ}(p^{\gamma-2}, p)$. Ist P_1 zyklisch, so ist S p-nilpotent nach [3, S. 419, 2.7]. Ist P_1 abelsch vom $\mathrm{Typ}(p^{\gamma-2}, p)$, so ist S p-nilpotent ebenfalls nach [3, S. 419, 2.7], wenn nur $\gamma \geq 4$ ist. Ist $\gamma = 3$, so ist $p > 2$ und P_1 ist elementarabelsch vom $\mathrm{Typ}(p,p)$. Nun folgt die p-Nilpotenz von S nach 6.1. Das normale p-Komplement K von S ist aber das normale

p-Komplement von G, da $S \trianglelefteq G$ und $|G:S| = p$ gilt. Also ist G p-nilpotent.

q. e. d.

Hieraus ergibt sich folgende Verallgemeinerung von [3, S. 420, 2.9]:

6.4 Satz: Sei G eine Gruppe. Jede Sylowgruppe von G besitze einen zyklischen maximalen Normalteiler. Diedergruppen, Quasidiedergruppen, verallgemeinerte Quaternionengruppen und elementarabelsche Gruppen vom Typ(2,2) mögen jedoch nicht als 2-Sylowgruppen von G auftreten. Dann ist G auflösbar.

Beweis: Sei p der kleinste Primteiler von $|G|$. Sei P eine p-Sylowgruppe von G. Ist P abelsch, so ist P entweder zyklisch oder vom Typ$(p^{\delta-1},p)$. Ist P nicht-abelsch, so ist P eine kritische Gruppe nach [3, S. 90/91]. Nach [3, S. 419, 2.7] bezw. nach den Sätzen 6.1 und 6.3 ist G p-nilpotent. Ist K das p-Sylowkomplement von G, so erfüllt K wiederum die Voraussetzungen des Satzes. Wegen $K \lneq G$ kann man annehmen, dass K auflösbar ist. Da G/K ebenfalls auflösbar ist, folgt die Auflösbarkeit von G.

q. e. d.

§ 7 Weitere Sätze über quasinormale Untergruppen.

Wir haben in § 2 gesehen: Ist $Q \leqq_q G$, so ist Q^* genau dann quasinormal in G, wenn Q^* normal in G ist. In diesem Paragraphen soll nun zunächst ein Beispiel angegeben werden, dass Q^* nicht normal in G zu sein braucht. Sodann werden wir eine hinreichende Bedingung dafür angeben, dass $Q^* \trianglelefteq G$ gilt für alle Quasinormalteiler Q der Gruppe G.

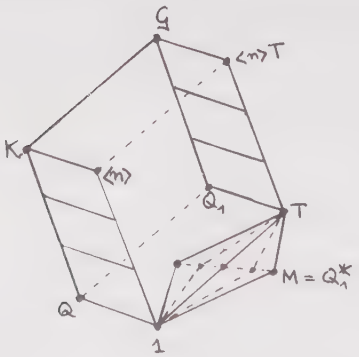
7.1 Beispiel: Sei $F = \mathbb{Z}/(17)$ ein Körper mit 17 Elementen. Sei $T = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x,y \in F \right\}$ der 2-dimensionale Vektorraum über F.

$n = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ und $s = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sind Elemente aus GL(2,17).

Es gilt $n^8 = s^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $n^s = \begin{pmatrix} 0 & 15 \\ 15 & 0 \end{pmatrix} = n^5$.

$K = \langle n \rangle \curlywedge \langle s \rangle \leqq GL(2,17)$ ist also eine kritische Gruppe der Ordnung 16. Wir setzen T und K zu einem semidirekten Produkt zusammen, wobei K auf T in der natürlichen Weise wirkt:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^k = k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in T,\ k \in K \right).$$



Nun ist $Q = \langle s \rangle \leqq_q K$, also ist $Q_1 = QT \leqq_q G$. Wir setzen

$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in F \right\}$. Wegen $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}^s = \begin{pmatrix} -x \\ 0 \end{pmatrix} \in M$ ist $M \trianglelefteq Q_1$.

Wegen $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^s = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ist T mit Q modulo M elementweise vertauschbar. Also ist Q_1/M abelsch. Q_1 ist nicht nilpotent, da Q auf T nichttrivial wirkt. Also ist $M = Q_1^*$ der kleinste Normalteiler von Q_1 mit nilpotenter Faktorgruppe. Es gilt $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 0 \\ 2x \end{pmatrix} \notin M$. daher ist $Q_1^* \not\trianglelefteq G$.

Wir definieren nun:

7.2 Def.: Sei G eine Gruppe. G heisst eine q^*-n-Gruppe, wenn aus $Q \leqq_q G$ stets $Q^* \trianglelefteq G$ folgt.

Jede q-n-Gruppe ist auch eine q^*-n-Gruppe, da Q^* eine charakteristische Untergruppe von Q ist.
Untergruppen von q^*-n-Gruppen brauchen nicht notwendig wieder q^*-n-Gruppen zu sein, wie man leicht sieht, wenn man eine nicht-q^*-n-Gruppe G in die symmetrische Gruppe auf $|G|$ Ziffern einbettet. Jedoch gilt:

7.3 Lemma: Ist G eine q^*-n-Gruppe, ist $N \trianglelefteq G$, dann ist auch G/N eine q^*-n-Gruppe.

Beweis: Sei $Q/N \leqq_q G/N$. Dann ist $Q \leqq_q G$, also nach Voraussetzung $Q^* \trianglelefteq G$. Also ist $(Q/N)^* = Q^*N/N \trianglelefteq G/N$.

q. e. d.

7.4 Lemma: Sei $|G| = p^\alpha q^\beta$ mit verschiedenen Primzahlen p,q und ganzem Zahlen $\alpha, \beta \geq 1$. Die q-Sylowgruppe T von G sei ein elementarabelscher Normalteiler von G. Es gelte $p \nmid \sum_{\beta=1}^{\mu} q^{\beta-1}$ für alle μ mit $1 \leq \mu \leq \beta$. Dann ist G überauflösbar.

Beweis: T besitzt genau $\frac{q^{\gamma}-1}{q-1} = \sum_{\beta=1}^{\gamma} q^{\beta-1}$ Untergruppen der Ordnung q. Sei $U \leq T$ mit $|U| = q$. Es gilt $U \trianglelefteq T$, also ist $\delta_U := |G: \mathfrak{N}_G(U)|$ gleich 1 oder eine Potenz von p. δ_U ist die Anzahl der zu U unter G konjugierten Untergruppen. Wegen $p \nmid \sum_{\beta=1}^{\gamma} q^{\beta-1}$ gibt es eine Untergruppe R_1 der Ordnung q, deren Konjugiertenklasse nur aus R_1 besteht. Es gilt also $R_1 \trianglelefteq G$. Ist $R_1 < T$, so erfüllt G/R_1 wieder die Voraussetzung des Satzes. Es folgt die Existenz eines Normalteilers R_2 von G der Ordnung q^2 mit $R_1 < R_2$ usw. Es existiert also eine Kette $1 = R_0 < R_1 < \ldots < R_\gamma = T$ mit $R_\lambda \trianglelefteq G$ und $|R_\lambda / R_{\lambda-1}| = q$ für $\lambda = 1, \ldots, \gamma$. Da G/T eine p-Gruppe ist, besitzt somit G eine Hauptreihe mit zyklischen Faktoren. G ist also überauflösbar.

q. e. d.

Wir wollen nun einen Satz beweisen, welcher eine hinreichende Bedingung dafür angibt, dass die Gruppe G (und alle ihre Untergruppen) q^*-n-Gruppen sind.

7.5 Satz: Sei $|G| = \prod_{\lambda=1}^{\rho} p_\lambda^{\alpha_\lambda}$ mit verschiedenen Primzahlen p_λ und ganzen Zahlen $\alpha_\lambda \geq 0$. Die Numerierung der Primzahlen sei so vorgenommen, dass gilt:

a) Die p_λ-Sylowgruppen P_λ von G besitzen einen kritischen Abschnitt für $\lambda = 1, \ldots, \tau$ und es gilt $P_\lambda \in \mathfrak{Z}$ für $\lambda = \tau+1, \ldots, \rho$;

b) Die p_λ-Sylowgruppen P_λ von G sind nichtzyklisch für $\lambda = 1, \ldots, \sigma$ und die P_λ sind zyklisch für $\lambda = \sigma+1, \ldots, \rho$ $(0 \leq \tau \leq \sigma \leq \rho)$.

Sodann erfülle G die folgende Voraussetzung:

Für alle $\lambda = 1,\dots,\tau$ und für alle $\nu = 1,\dots,\sigma$ gelte

$$(*) \qquad p_\lambda \nmid \sum_{\beta=1}^{\beta_\nu} p_\nu^{\beta-1} \quad \text{für alle } \beta_\nu \text{ mit } 1 \leq \beta_\nu \leq \alpha_\nu .$$

Dann ist G eine q^*-n-Gruppe.

Zusatz: Die Voraussetzung des Satzes vererbt sich auf Untergruppen und Faktorgruppen von G. Daher ist auch jede Untergruppe und jede Faktorgruppe von G eine q^*-n-Gruppe.

Beweis: Sei $\overline{G}$ isomorph zu einer Untergruppe oder zu einer Faktorgruppe von G. Dann gilt $|\overline{G}| = \prod_{\lambda=1}^{\varrho} p_\lambda^{\overline{\alpha}_\lambda}$ mit $0 \leq \overline{\alpha}_\lambda \leq \alpha_\lambda$. Seien $\varkappa_1,\dots,\varkappa_{\overline{\tau}}$ genau diejenigen voneinander verschiedenen Zahlen aus der Reihe $1,\dots,\varrho$, so dass die $p_{\varkappa_\lambda}$-Sylowgruppen $\overline{P}_{\varkappa_\lambda}$ von $\overline{G}$ einen kritischen Abschnitt besitzen. Da dann auch die $p_{\varkappa_\lambda}$-Sylowgruppen $P_{\varkappa_\lambda}$ von G einen kritischen Abschnitt besitzen, gilt jedenfalls $\{\varkappa_1,\dots,\varkappa_{\overline{\tau}}\} \subseteq \{1,\dots,\tau\}$.

Seien $\omega_1,\dots,\omega_{\overline{\sigma}}$ genau diejenigen voneinander verschiedenen Zahlen aus der Reihe $1,\dots,\varrho$, so dass die p_{ω_ν}-Sylowgruppen $\overline{P}_{\omega_\nu}$ von $\overline{G}$ nichtzyklisch sind. Dann sind auch die p_{ω_ν}-Sylowgruppen P_{ω_ν} von G nichtzyklisch und es folgt $\{\omega_1,\dots,\omega_{\overline{\sigma}}\} \subseteq \{1,\dots,\sigma\}$. Für alle $\lambda = 1,\dots,\overline{\tau}$ und für alle $\nu = 1,\dots,\overline{\sigma}$ gilt dann nach (*):

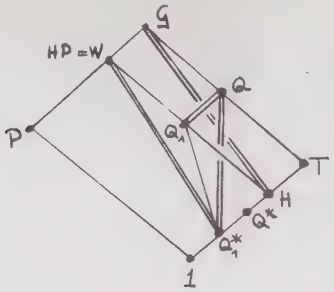
$$p_{\varkappa_\lambda} \nmid \sum_{\beta=1}^{\beta_\nu} p_{\omega_\nu}^{\beta-1} \quad \text{für alle } \beta_\nu \text{ mit } 1 \leq \beta_\nu \leq \overline{\alpha}_\nu \leq \alpha_\nu .$$

$\overline{G}$ erfüllt also wieder die Voraussetzung unseres Satzes.

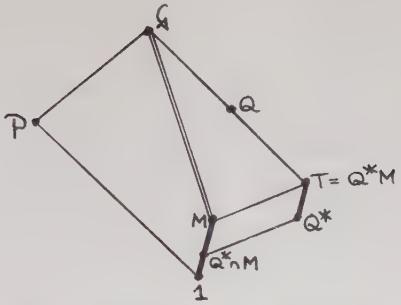
Sei nun G ein minimales Gegenbeispiel zu dem Satz. Sei $Q \leq_q G$ und $Q^* \not\trianglelefteq G$. Wir wählen in 2.2 für $\mathcal{K}$ die Klasse

aller Gruppen, die die Voraussetzung unseres Satzes erfüllen. $\mathfrak{N}$ sei die Formation der nilpotenten Gruppen. Dann folgt: G/Q_G ist eine p-Gruppe, Q_G ist eine nilpotente Gruppe und es gilt $(Q^*)_G = 1$. G ist also auflösbar von der nilpotenten Länge ≤ 2.

Sei T der kleinste Normalteiler von G mit p-Faktorgruppe. Dann gilt $Q^* \leq T \leq Q_G$ und $p \nmid |T|$, da T nilpotent ist. T ist also das normale p-Sylowkomplement von G. Sei P eine p-Sylowgruppe von G.



Wir setzen $H := (Q^*)^G$. Dann gilt $Q^* \leq H \leq T$. Angenommen, es gilt $H < T$. Dann ist die Gruppe $W := HP$ eine echte Untergruppe von G, W/H ist eine p-Sylowgruppe von G/H und T/H ist das normale p-Sylowkomplement von G/H. Wir setzen $Q_1 := Q \cap W$. Dann ist Q_1/H eine p-Sylowgruppe von Q/H. Wegen $Q^* \leq H$ ist Q/H nilpotent, also $Q_1 \trianglelefteq Q$. Dann gilt aber auch $Q_1^* \trianglelefteq Q$. Q_1 ist eine quasinormale Untergruppe von W. Wegen $|W| < |G|$ gilt dann $Q_1^* \trianglelefteq W$. Wegen $G = QW$ gilt dann $Q_1^* \trianglelefteq G$. Aus $Q_1 \leq Q$ folgt $Q_1^* \leq Q^*$. Wegen $(Q^*)_G = 1$ folgt somit $Q_1^* = 1$. Also ist Q_1 nilpotent. Es gilt $Q = Q_1 T$. Q_1 und T sind nilpotente Normalteiler von Q, also ist Q nilpotent und es folgt $Q^* = 1$. Es ist also $H = T$.



Wir wählen einen minimalen Normalteiler M von G mit $1 < M \leq T$. Aus $|G/M| < |G|$ und $Q/M \leq_q G/M$ folgt dann $(Q/M)^* = Q^*M/M \trianglelefteq G/M$, also $Q^*M \trianglelefteq G$. Wegen $M = T$ gilt $Q^*M = T$. Nun ist $T/Q^* = Q^*M/Q^* \cong M/M \cap Q^*$. T/Q^* ist also eine elementarabelsche Gruppe. Dann ist $T \cong T/1 = T/(Q^*)_G$ ebenfalls eine elementarabelsche Gruppe. Sei etwa $|T| = q^{\gamma}$ ($\gamma \geq 0$, q eine Primzahl). Es gilt $p \neq q$. Wir können annehmen, dass $\gamma \geq 2$ gilt und dass die p-Sylowgruppen P von G einen kritischen Abschnitt besitzen: Wäre $0 \leq \gamma \leq 1$, so wäre $Q^* = 1$ oder $Q^* = T$, also in jedem Fall $Q^* \trianglelefteq G$. Wären die p-Sylowgruppen von G $\mathfrak{A}$-Gruppen, so wäre Q/T als Quasinormalteiler von $G/T \cong P$ ein Normalteiler von G/T. Es wäre also $Q \trianglelefteq G$ und damit auch $Q^* \trianglelefteq G$.

Nach Voraussetzung des Satzes gilt nun $p \nmid \sum_{\beta=1}^{\mu} q^{\beta-1}$ für alle μ mit $1 \leq \mu \leq \gamma$. Nach 7.4 ist nun G überauflösbar und mit [3, S. 716, 9.1 b)] folgt die Nilpotenz von G'. Es ist $G'Q \trianglelefteq G$. Mit 1.8 erhält man $Q^* = Q^*(G')^* = (QG')^* \trianglelefteq G$, da $(QG')^*$ eine charakteristische Untergruppe von QG' ist. G ist somit kein Gegenbeispiel.

q. e. d.

Literaturverzeichnis

[1] HAINZL J. Über die Vertauschbarkeit subnormaler Untergruppen. Dissert. Tübingen (1962)

[2] HAINZL J. Über Seminormalität in Gruppen und Verbänden. Math. Zeitschr. 80, 358-362 (1963).

[3] HUPPERT B. Endliche Gruppen I, Springer-Verlag (1967).

[4] ITÔ N. und SZÉP J. Über die Quasinormalteiler von endlichen Gruppen. Acta Scient. Math. Szeged 23, 168-170 (1962).

[5] SUZUKI M. Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups. Ergebnisse der Mathematik 10, (1956).

[6] TAMASCHKE O. Verbandstheoretische Methoden in der Theorie der subnormalen Untergruppen. Archiv der Math. 13, 313-330 (1962).

[7] WIELANDT H. Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen. Math. Zeitschr. 45, 209-245 (1939).

[8] WIELANDT H. Vertauschbare nachinvariante Untergruppen. Abh. Math. Sem. Hamb. 21, 55-62 (1957).

[9] WIELANDT H. Über den Normalisator der subnormalen Untergruppen. Math. Zeitschr. 69, 463-465 (1958).

[10] ZASSENHAUS H. The Theory of groups. 2nd edit. Göttingen (1958).

Lebenslauf

Am 17. Januar 1941 wurde ich, Rudolf Maier, als zweites Kind des Zahnarztes Dr. Artur Maier und seiner Frau Else, geb. Schlatterer, in Göppingen geboren.

Vom Herbst 1947 bis Juli 1951 besuchte ich die Volksschule in Süssen Kreis Göppingen. Danach besuchte ich bis zum Frühjahr 1960 das Hohenstaufengymnasium in Göppingen. Anschliessend war ich auf dem Gymnasium in Geislingen (Steige), wo ich im Frühjahr 1962 die Reifeprüfung ablegte.

Mein Studium der Mathematik und Physik begann ich im Sommersemester 1962 in Tübingen. Mein Staatsexamen legte ich im Herbst 1967 in den Fächern Mathematik und Physik hier ab.

Vom November 1967 bis November 1968 war ich als wissenschaftlich geprüfte Hilfskraft am Mathematischen Institut der Universität Tübingen tätig. Ab Dezember 1968 verwaltete ich hier eine Assistentenstelle. Während meiner Tätigkeit am Mathematischen Institut entstand unter der Anleitung von Herrn Professor Dr. Olaf Tamaschke die vorliegende Arbeit.

Meine akademische Ausbildung verdanke ich den Herrn Professoren, Dozenten und Akademischen Räten:
G. Betsch, W. Braunbek, H. Kneser, H. Krüger, G. Möllenstedt, R. Mühleisen, M. Müller, M. Reimer, P. Roquette, K. Radbruch, H. Salzmann, H. Schaefer, H. Stumpf, O. Tamaschke, W. Vogel, H. Wielandt, A. Wolf, K. Zeller.

Druck: Polyfoto Dr. Vogt KG
Stuttgart 1, Königstraße 19 a
Telefon 291063

Druck: Polyfoto Dr. Vogt KG
Stuttgart 1, Königstraße 19 a
Telefon 291063